第四章-插值与逼近

(5) 正交多项式

目录

函数的最佳平方逼近中，我们需要解 $\boldsymbol{Ga} = \boldsymbol{d}$：

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} G_{00} & G_{01} & \cdots & G_{0n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{n0} & G_{n1} & \cdots & G_{nn} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} d_0 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

其中 $G_{j,k} = \langle \varphi_j, \varphi_k \rangle_\rho$, $d_k = \langle f, \varphi_k \rangle_\rho$

我们会希望这个方程组越稳定越好，而我们对于基函数 φ_k 其实有选择的自由，所以我们能否直接选 φ_k 满足

$$G_{j,k} = A_k \delta_{j,k}$$

其中 $A_k > 0$ 是某个正数。我们可以更特殊地找到 φ_k 满足

$$G_{j,k} = \delta_{j,k}$$

好处：方程组不用再解了，最佳的系数自动满足

$$
\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} A_0^{-1} d_0 \\ A_1^{-1} d_1 \\ \vdots \\ A_n^{-1} d_n \end{bmatrix}
$$

目标问题：如何找到正交多项式 φ_k?

这部分核心任务：

- 理解 Gram-Schmidt 正交化
- 了解两类特殊的正交多项式：Legendre 多项式和 Chebyshev 多项式

目录

对于基函数 $\{1, x^1, x^2, \cdots, x^n, \cdots\}$ 一般而言不太可能正交

需要解决的问题：如何构造正交的多项式 φ_k

我们暂时考虑权重 $\rho = 1$，区间 $[a, b] = [0, 1]$。取 $\varphi_0 = 1$

为保持函数族不变，选择 $\varphi_1(x) = x + a_0$。

问题：a_0 该如何选?

我们需要

$$0 = \langle \varphi_0, \varphi_1 \rangle = \int_0^1 1 \cdot (x + a_0)\ \mathrm{d}x \qquad \to \qquad a_0 = -\int_0^1 x\ \mathrm{d}x = -1/2.$$

更一般地，如果我们使用抽象的符号 φ_0, $\varphi_1(x) = \underbrace{x}_{\text{新函数}} + \underbrace{a_0\ \varphi_0}_{\text{旧函数}}$，则

$$0 = \langle \varphi_0, \varphi_1 \rangle = \langle \varphi_0, x \rangle + a_0 \langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle \qquad \Longrightarrow a_0 = -\frac{\langle x, \varphi_0 \rangle}{\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle}$$

因而，我们取正交函数族内的第二个函数为

$$\varphi_1(x) = x - \frac{\langle x, \varphi_0 \rangle}{\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle} \varphi_0(x)$$

第三个函数可以是

$$\varphi_2(x) = x^2 + a_1 \varphi_1(x) + a_0 \varphi_0(x)$$

练习： 通过类似的思想，我们该如何找到 a_0, a_1?

前一页的答案

$$0 = \langle \varphi_2, \varphi_0 \rangle = \langle x^2, \varphi_0 \rangle + a_0 \langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle \qquad \Longrightarrow a_0 = -\frac{\langle x^2, \varphi_0 \rangle}{\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle}$$

$$0 = \langle \varphi_2, \varphi_1 \rangle = \langle x^2, \varphi_1 \rangle + a_1 \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle \qquad \Longrightarrow a_1 = -\frac{\langle x^2, \varphi_1 \rangle}{\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle}$$

故而，

$$\varphi_2(x) = x^2 - \frac{\langle x^2, \varphi_1 \rangle}{\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle} \varphi_1(x) - \frac{\langle x^2, \varphi_0 \rangle}{\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle} \varphi_0(x).$$

Gram-Schmidt 正交化

对于一般情况，我们具有如下的递推关系来构造正交函数族:

$$\varphi_0(x) = 1, \qquad \varphi_n(x) = x^n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\langle x^n, \varphi_k \rangle}{\langle \varphi_k, \varphi_k \rangle} \varphi_k(x) \tag{1}$$

- φ_n 的最高次数为 n
- $\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 组成了最高次不超过 n 的多项式的正交函数族
- 由于正交的关系，$\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 显然线性无关

上述的递推关系可以改写成:

$$\begin{aligned} &\varphi_{n+1}(x) = (x - \alpha_n)\varphi_n(x) - \beta_n \varphi_{n-1}(x), \\ &\alpha_n = \frac{\langle x\varphi_n, \varphi_n \rangle}{\langle \varphi_n, \varphi_n \rangle}, \qquad \beta_n = \frac{\langle \varphi_n, \varphi_n \rangle}{\langle \varphi_{n-1}, \varphi_{n-1} \rangle} \end{aligned} \tag{2}$$

公式：
$$\varphi_{n+1}(x) = (x-\alpha_n)\varphi_n(x) - \beta_n\varphi_{n-1}(x),$$
$$\alpha_n = \frac{\langle x\varphi_n, \varphi_n\rangle}{\langle \varphi_n, \varphi_n\rangle}, \qquad \beta_n = \frac{\langle \varphi_n, \varphi_n\rangle}{\langle \varphi_{n-1}, \varphi_{n-1}\rangle}$$

显然，右侧可以写成 $\mathrm{RHS} = x^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} a_k\varphi_k(x)$，因而我们仅需证明对于任意的 $k \le n$，$\langle \mathrm{RHS}, \varphi_k\rangle = 0$：

$$\langle \mathrm{RHS}, \varphi_n\rangle = \langle x\varphi_n - \alpha_n\varphi_n - \beta_n\varphi_{n-1}, \varphi_n\rangle = \langle x\varphi_n, \varphi_n\rangle - \alpha_n\langle \varphi_n, \varphi_n\rangle = 0$$

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{RHS}, \varphi_{n-1}\rangle &= \langle x\varphi_n - \alpha_n\varphi_n - \beta_n\varphi_{n-1}, \varphi_{n-1}\rangle = \langle x\varphi_n, \varphi_{n-1}\rangle - \beta_n\langle \varphi_{n-1}, \varphi_{n-1}\rangle \\ &\overset{??}{=} \langle \varphi_n, x\varphi_{n-1}\rangle - \beta_n\langle \varphi_{n-1}, \varphi_{n-1}\rangle \overset{??}{=} \langle \varphi_n, \varphi_n\rangle - \beta_n\langle \varphi_{n-1}, \varphi_{n-1}\rangle = 0\end{aligned}$$

对于 $k < n-1$，

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{RHS}, \varphi_k\rangle &= \langle x\varphi_n - \alpha_n\varphi_n - \beta_n\varphi_{n-1}, \varphi_k\rangle = \langle x\varphi_n, \varphi_k\rangle \\ &\overset{??}{=} \langle \varphi_n, x\varphi_k\rangle \overset{??}{=} 0\end{aligned}$$

定理 (正交多项式的单重实根)

假设 $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是由上述方法构造的、在区间 $[a, b]$ 上是带权 ρ 的正交多项式族（其中 φ_n 的最高次为 n），则 φ_n（$n \geq 1$）的 n 个根皆为单重实根，且在区间 (a, b) 内。

证明略；结论了解即可

目录

Legendre 多项式

区间 $[a, b] = [-1, 1]$，$\rho = 1$，由 $\{1, x^1, x^2, \cdots\}$ 正交化得到的一族多项式被称为**Legendre 多项式**。最早由法国数学家 Legendre 在 1785 年引入。

- 若最高项系数为 1 的多项式（如前面所阐述的）为

$$\widetilde{P}_n(x) = \frac{n!}{(2n)!} \cdot \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\Big((x^2 - 1)^n\Big)$$

- 另一类常用的表达式（乘了某个系数）为

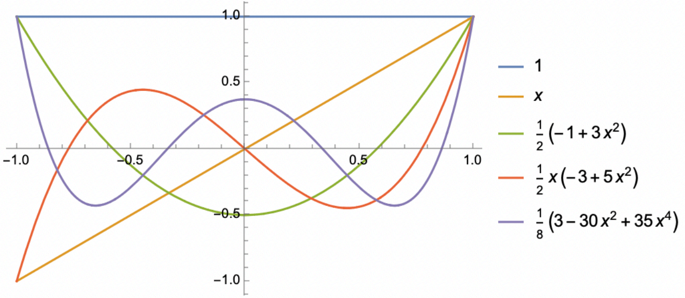
$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\Big((x^2 - 1)^n\Big)$$

P_n

```
Pn = Simplify[Table[1 / 2 ^ n / Factorial[n] * D[(x ^ 2 - 1) ^ n, {x, n}], {n, 0, 4}]]
```

$$\left\{1,\ x,\ \frac{1}{2}\left(-1+3x^2\right),\ \frac{1}{2}x\left(-3+5x^2\right),\ \frac{1}{8}\left(3-30x^2+35x^4\right)\right\}$$

```
Plot[Pn, {x, -1, 1}, PlotLegends → "Expressions"]
```

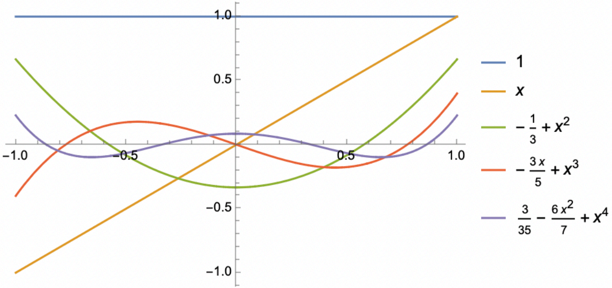


$\widetilde{P}_n$

```
Pntilde = Simplify[Table[Factorial[n] / Factorial[2 * n] * D[(x ^ 2 - 1) ^ n, {x, n}], {n, 0, 4}]]
```

$$\left\{1,\ x,\ -\frac{1}{3}+x^2,\ -\frac{3\,x}{5}+x^3,\ \frac{3}{35}-\frac{6\,x^2}{7}+x^4\right\}$$

```
Plot[Pntilde, {x, -1, 1}, PlotLegends → "Expressions"]
```



P_n 的性质

- **正交：** $\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\ \mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1}\delta_{n,m}$

  证明：请参见课本

- **奇偶性：** $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$
- **迭代关系：** $(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$

  证明：可以通过讲义里的公式(2)简化得到

- **实现平方误差最小：** 在所有最高项系数为 1 的 n 次多项式中，Legendre 多项式 $\widetilde{P}_n$ 在 $[-1,1]$ 上与零的平方误差最小

  证明：见课堂

- P_n 在区间 $(-1,1)$ 内有 n 个不同的实零点

  证明：请参见讲义第11页

目录

Chebyshev 多项式

权函数 $\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，区间 $[-1,1]$，由 $\{1,x^1,x^2,\cdots\}$ 正交化得到的一族多项式被称为**Chebyshev 多项式**

$$T_n(x)=\cos\left(n\cos^{-1}(x)\right),\qquad -1\le x\le 1.$$

问题：这个貌似不是多项式吧?

$$T_0(x)=\cos(0)=1,\qquad T_1(x)=\cos\left(\cos^{-1}(x)\right)=x$$

由三角等式 $\cos\Big((n+1)\theta\Big)=2\cos(\theta)\cos(n\theta)-\cos\Big((n-1)\theta\Big)$ 可得递推关系

$$T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x)\qquad\Longrightarrow T_n\text{为多项式}$$

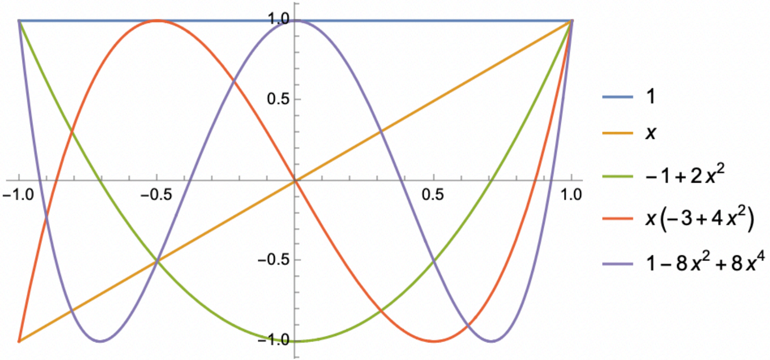
因而，T_n 是最高项系数为 2^{n-1} $(n\ge 1)$ 的多项式(性质 1)。

T_n

```
Cheby = Simplify[Table[ChebyshevT[n, x], {n, 0, 4}]]
```

$\{1,\ x,\ -1+2x^2,\ x(-3+4x^2),\ 1-8x^2+8x^4\}$

```
Plot[Cheby, {x, -1, 1}, PlotLegends → "Expressions"]
```



其它性质

- $$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \frac{\pi}{2}, & n = m \neq 0 \\ \pi, & n = m = 0. \end{cases}$$

证明：令 $\theta = \cos^{-1}(x)$，因而 $\mathrm{d}\theta = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$，

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{\pi}^{0} \cos(n\theta)\cos(m\theta)(-\mathrm{d}\theta) = \int_{0}^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)\,\mathrm{d}\theta = \text{结论}$$

其它性质

- T_{2k} 仅含 x 的偶次幂；T_{2k+1} 仅含 x 的奇次幂
- T_n 在区间 $[-1,1]$ 有 n 个零点，为 $x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$, $k = 1, 2, \cdots, n$

第二类 Chebyshev 多项式、Laguerre 多项式、Hermite 多项式将不再介绍；
大家有需要可以自学

目录

正交多项式在最佳平方逼近问题中的应用

假设我们在最佳平方逼近中使用了正交多项式，则最佳系数为

$$a_k^* = \frac{\langle f, \varphi_k \rangle}{\langle \varphi_k, \varphi_k \rangle}$$

由面前的讲义可知最佳的平方逼近函数 S^* 为

$$P_n^* = \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle f, \varphi_k \rangle}{\langle \varphi_k, \varphi_k \rangle} \varphi_k$$

误差为

$$\|f - P_n^*\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle - \boldsymbol{d}^T \boldsymbol{a}^*} = \sqrt{\langle f, f \rangle - \sum_{k=0}^{n} d_k a_k^*} = \sqrt{\langle f, f \rangle - \sum_{k=0}^{n} \frac{|\langle f, \varphi_k \rangle|^2}{\langle \varphi_k, \varphi_k \rangle}}$$

由此可见，当 n 增加的时候，误差至少不增加！

所以最佳近似为

$$f \approx P_n^* = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k, \qquad a_k = \frac{\langle f, \varphi_k \rangle}{\langle \varphi_k, \varphi_k \rangle}$$

很自然，由于增加 n 时近似误差不增加，我们希望 $n \to \infty$

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k \qquad \text{(广义 Fourier 级数)}$$

提示：级数不一定收敛；收敛是需要一定的条件。

正交多项式在一般区间 $[a, b]$ 时

如果区间不是 $[-1,1]$，我们没法直接使用 Legrendre 多项式近似，所以，

$$
\begin{aligned}
&\min_P \|f-P\|^2 \\
=&\min_P \int_a^b |f(x)-P(x)|^2 \,\mathrm{d}x, \qquad x=\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2} \\
=&\min_P \frac{b-a}{2}\int_{-1}^1 \left|f\Big(\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2}\Big)-P\Big(\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2}\Big)\right|^2 \,\mathrm{d}t \\
=&\min_Q \frac{b-a}{2}\int_{-1}^1 \left|f\Big(\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2}\Big)-Q(t)\right|^2 \,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

所以，问题变成了如何找到对于新函数 $f\big(\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2}\big)$（其中 $t\in[-1,1]$）的最佳平方逼近。此时，我们可以使用 $[-1,1]$ 区间的正交多项式来计算。

目录

总结

- 了解为何需要引入正交多项式
- Gram-Schmidt 正交化过程；需要能掌握原理和公式
- Legendre 多项式和 Chebyshev 多项式
- 增加正交多项式的个数 n 时，平方逼近的误差一定不增加
- $[-1,1]$ 区间的正交多项式也可以被应用于一般的闭区间 $[a,b]$ 中