第四章-插值与逼近

(3) 三次样条插值

目录

第一部分：拉格朗日和牛顿插值：仅拟合函数值这一信息

第二部分：Hermite 插值：拟合函数值，及其导数值

第三部分：对于部分机械问题，函数需要更好的光滑程度，如需要二次导数连续

- 考虑 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$，若 $S \in C^2[a, b]$，且在每个区间 $[x_j, x_{j+1}]$ 上是三次多项式，则称 S 为三次样条函数
- 若 $S(x_j) = f_j$，则称 S 为三次样条插值函数

三次样条和分段三次 Hermite 插值的共同点：每个分段内都使用三次函数

区别：Hermite 插值假设已经知道节点处的导数值，此处的设定是不知道导数值，但需要二次导数的连续性

数一下参数值和拟合的条件

我们具有 n 个小区间，所以我们有 $4n$ 参数

条件来源	能列几个公式?
$S(x_j) = f_j$	??
S' 在节点连续	??
S'' 在节点连续	??

数一下参数值和拟合的条件

我们具有 n 个小区间，所以我们有 $4n$ 参数

条件来源	能列几个公式?
$S(x_j) = f_j$	$2n$
S' 在节点连续	$n-1$
S'' 在节点连续	$n-1$
	$4n-2$

所以我们还需要两个限制条件!

额外条件的选择取决于具体问题

- $S'(x_0) = f'_0$, $S'(x_n) = f'_n$
- $S''(x_0) = f''_0$, $S''(x_n) = f''_n$
- **自然边界** $S''(x_0) = 0$, $S''(x_n) = 0$
- **周期边界** $S(x_0^+) = S(x_n^-)$, $S'(x_0^+) = S'(x_n^-)$, $S''(x_0^+) = S''(x_n^-)$

  如果我们需要周期边界条件，我们天然需要数据 $f_0 = f_n$，因而 $S(x_0^+) = S(x_n^-)$ 自动满足，实际上此处只有两个新增的限制条件。

目录

三转角方程

使用 Hermite 插值的形式

$$S(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f_k\alpha_k^{(1)}(x) + f_{k+1}\alpha_{k+1}^{(2)}(x) + m_k\beta_k^{(1)}(x) + m_{k+1}\beta_{k+1}^{(2)}(x)$$

其中 m_k 是待定系数，故而有 $n+1$ 个参数

我们需要满足 S'' 连续（$n-1$ 个方程）以及额外的两个方程

直接计算可知:

$$
\begin{aligned}
S''(x_j+0) &= -\frac{4}{h_j}m_j - \frac{2}{h_j}m_{j+1} + \frac{6}{h_j^2}(f_{j+1}-f_j) \\
S''(x_j-0) &= \frac{2}{h_{j-1}}m_{j-1} + \frac{4}{h_{j-1}}m_j - \frac{6}{h_{j-1}^2}(f_j-f_{j-1})
\end{aligned}
$$

由于我们需要连续性，通过整理一下 $S''(x_j+0) = S''(x_j-0)$ 可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{h_{j-1}}m_{j-1} + 2\left(\frac{1}{h_{j-1}} + \frac{1}{h_j}\right)m_j + \frac{1}{h_j}m_{j+1} \\
&= 3\left(\frac{f_{j+1}-f_j}{h_j^2} + \frac{f_j-f_{j-1}}{h_{j-1}^2}\right) \quad j = 1, 2, \ldots, n-1
\end{aligned}
$$

左右同时乘以 $\frac{h_{j-1}h_j}{h_{j-1}+h_j}$

$$\lambda_j m_{j-1} + 2m_j + \mu_j m_{j+1} = g_j$$

$$\begin{cases} \lambda_j = \dfrac{h_j}{h_{j-1}+h_j} \\ \mu_j = \dfrac{h_{j-1}}{h_{j-1}+h_j} \\ g_j = 3\lambda_j \dfrac{f_j - f_{j-1}}{h_{j-1}} + 3\mu_j \dfrac{f_{j+1} - f_j}{h_j} \\ \quad = 3\lambda_j f\left[x_{j-1}, x_j\right] + 3\mu_j f\left[x_j, x_{j+1}\right] \end{cases}$$

若增加条件 $m_0 = f_0', m_n = f_n'$ （即选择 1）

$$\begin{bmatrix} 2 & \mu_1 & & & \\ \lambda_2 & 2 & \mu_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_{n-2} & 2 & \mu_{n-2} \\ & & & \lambda_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 - \lambda_1 f_0' \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{n-2} \\ g_{n-1} - \mu_{n-1} f_n' \end{bmatrix}$$

这个方程组可以通过追赶法来求解

问题：请验证为什么上面的矩阵是严格对角占优的?

其它三种选择，请自行推导

收敛性

由于系数矩阵是严格对角占优，我们可以验证：

定理

倘若 f 是连续可导函数（$f \in C^1[a,b]$），则 $\|S - f\|_\infty = \mathcal{O}(h)$，即当 $h \to 0$，三次样条插值函数一致收敛到真解 f。

实际的含义是：只要数据点数量 n 足够大，h 就足够小，近似可以足够好。

课本引理（p 41) 可参考论文：Varah, A lower bound for the smallest singular value of a matrix, Linear Algebra and Its Applications 11 (1975) 3–5.

目录

和三转角方程的区别是参数化的方式不同。

三转角方程参数化导数

三弯矩方程采用参数化二阶导数来实现：通过参数化 $S''(x_j) = M_j$ （M_j 在力学上和弯矩有关），二阶导数在区间 $[x_j, x_{j+1}]$ 上

$$S''(x) = M_j \frac{x_{j+1} - x}{h_j} + M_{j+1} \frac{x - x_j}{h_j}$$

通过积分得到课本的公式 (2.8.17)。

最后我们还需要拟合数据 f_j，以及保证函数一阶导数的连续性

（详见课本 2.8.3 节）

目录

总结

- 三次样条函数仅使用函数值作为数据点，但要求更好的光滑程度
- 理解三次样条插值为什么需要额外的条件，以及条件怎么提
- 理解三转角方程的推导和思路
- 了解收敛性的结论
- 理解三弯矩方程的推导和思路