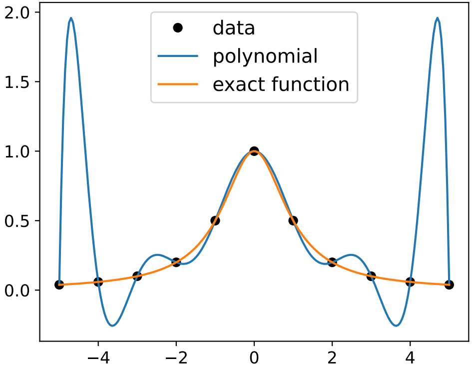
第四章-插值与逼近

(2) 分段插值

目录

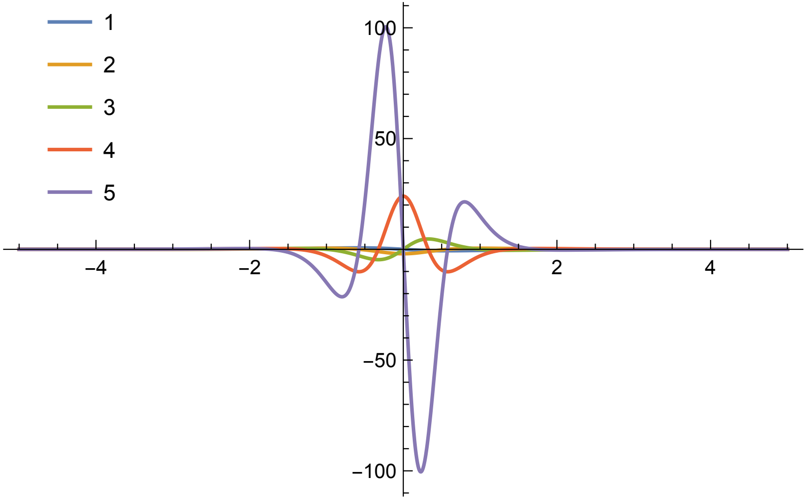
高次多项式近似的局限性

龙格（Runge）探究过一个例子：$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$：



问题：为什么高次多项式可以很好地近似 $\sin$，但是不能近似这个简单函数?

上述函数的不同阶导数的图:



目标

若函数 f 的高阶导数的值增长过快，高次多项式很难提供有效的近似

对于该函数，我们还不如直接将相邻的点线性连接起来比较好

分段线性插值对这一类情景具有一定的优势

鉴于对函数光滑性的要求，后续会介绍

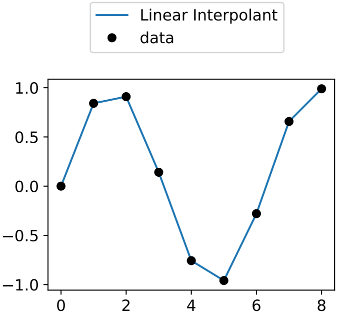
- 分段三次 Hermite 插值
- 三次样条插值

回顾练习

对于拉格朗日插值 $P(x) = \sum_{j=0}^{n} f_j \, \ell_j(x)$，请写出 ℓ_j 的表达式。

目录

分段线性



我们假设具有数据点 (x_i, f_i)
$i = 0, 1, 2, \cdots, n$

定义 $h_k = x_{k+1} - x_k$

$h = \max_{0 \leq k \leq n-1} h_k$

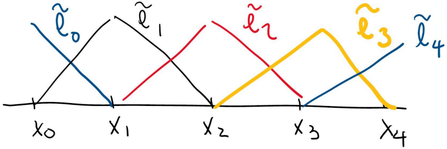
在区间 $x \in [x_k, x_{k+1}]$ 间，直线为

$$I_h(x) = \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} f_k + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} f_{k+1}$$

我们可以把整段函数改写成:

$$I_h(x) = \sum_{j=0}^{n} f_j \, \tilde{\ell}_j(x), \quad \tilde{\ell}_j\,(x_k) = \delta_{j,k}$$

$$\tilde{\ell}_j(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}, & x_{j-1} \leq x \leq x_j \\ \dfrac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}}, & x_j \leq x \leq x_{j+1} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$



注：符号 $\tilde{\ell}_j$ 要和拉格朗日插值的基函数的符号 ℓ_j 区分开，两者不一样

问题：在不做任何计算的前提下，请解释为何 $1 = \sum_{j=0}^{n} \tilde{\ell}_j(x)$?

误差分析

若 f'' 存在且有界，我们可以说明分段线性插值是关于 h 的二阶收敛。

对于任何的 $x \in [x_k, x_{k+1}]$，

$$|f(x) - I_h(x)| = \left| \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_k)(x - x_{k+1}) \right| \leq \frac{\max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|}{8} h^2$$

由于该结果对于任何的 $x \in [a, b]$ 都对，

$$\|f - I_h\|_\infty \leq \frac{\max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|}{8} h^2$$

所以当 $h \to 0$ 时，分段线性插值函数 I_h 一致收敛到 f。

收敛阶数

对于函数插值问题:

若误差 $\leq C_1 h$，我们称该算法为一阶近似算法

若误差 $\leq C_2 h^2$，则为二阶近似算法

若误差 $\leq C_3 h^3$，则为三阶近似算法

注: 此处的算法阶数和迭代法的算法阶数的定义有所差异:

插值问题中的一阶算法和迭代算法中的一阶算法的误差衰减速度有本质区别!

目录

背景

分段线性插值的鲁棒性比较好（不会有龙格现象），但它在节点不是很光滑，怎么办?

该需求翻译成数学语言：对于不同的分段，希望近似函数的导数能够连续

首先考虑：**倘若我们增加已知导数信息，我们如何找到对应的插值多项式?**

Hermite 插值

对于函数 f，假设我们已经知道该函数的导数，希望找到一个多项式 H 满足：

$$\begin{cases} H(x_i) = f_i \\ H'(x_i) = f_i' \end{cases}$$

对于任意的 $0 \le i \le n$。

此处共有 $2n+2$ 个方程，所以考虑 $2n+1$ 次多项式来近似

$$H_{2n+1}(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{2n+1} x^{2n+1}$$

问题：如何找到对应的系数 a_i?

例子：假设 x 代表时间，f 代表位移，则 f' 代表速度；我们测量得到在节点时间 x_i，某物体的位移 f_i 和速度 f_i'，该插值问题是指要找到近似函数 H 来同时插值位移和速度的数据值。

方法 1：根据限制条件，直接解 $2n+2$ 次线性方程组

方法 2：构造基函数

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} f_j \ \alpha_j(x) + f_j' \ \beta_j(x)$$

其中对于任意的 j,k，

$$\begin{aligned} \alpha_j(x_k) &= \delta_{j,k} \qquad & \alpha_j'(x_k) &= 0 \\ \beta_j(x_k) &= 0 \qquad & \beta_j'(x_k) &= \delta_{j,k} \end{aligned}$$

我们猜测 $\alpha_j(x) = (ax+b)\ell_j^2(x)$，其中 ℓ_j 是拉格朗日插值的基函数。

根据条件，我们需要

$$\begin{cases} \alpha_j(x_j) = (ax_j+b)\ell_j^2(x_j) = ax_j + b = 1 \\ \text{若} k \neq j,\ \alpha_j(x_k) = (ax_k+b)\ell_j^2(x_k) = 0 \qquad \Longrightarrow \text{自动满足} \end{cases}$$

计算可知：

$$\alpha_j'(x) = a\ell_j^2(x) + 2(ax+b)\ell_j(x)\ell_j'(x)$$

当 $k \neq j$，问题：请验证为何 $\alpha_j'(x_k) = 0$ 自动满足。

最后一个条件是：

$$\alpha_j'(x_j) = a + 2(ax_j+b)\ell_j'(x_j) = 0$$

$$(\text{条件})\qquad \begin{cases} ax_j + b = 1 \\ a + 2\ell_j'(x_j) = 0 \end{cases}$$

通过计算 $\ell_j'(x_j) = \sum_{k\neq j} \frac{1}{x_j - x_k}$，因此

$$a = -2\sum_{k\neq j} \frac{1}{x_j - x_k} \qquad b = 1 + 2x_j \sum_{k\neq j} \frac{1}{x_j - x_k}$$

总结一下：

$$\alpha_j(x) = \left(1 - 2(x - x_j)\sum_{k\neq j} \frac{1}{x_j - x_k}\right) \ell_j^2(x)$$

类似的计算可知：

$$\beta_j(x) = (x - x_j)\ell_j^2(x)$$

总结：Hermite 插值

假设我们考虑节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$，且我们知道函数值 f_i，以及函数的导数 f_i'。则存在一个唯一的 $2n+1$ 次多项式 H_{2n+1} 使得对于任意的 $0 \le i \le n$，

$$H(x_i) = f_i \qquad H'(x_i) = f_i'$$

该函数具有表达式：

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} f_j\ \alpha_j(x) + f_j'\ \beta_j(x)$$

$$\alpha_j(x) = \left(1 - 2(x - x_j)\sum_{k \neq j} \frac{1}{x_j - x_k}\right)\ \ell_j^2(x)$$

$$\beta_j(x) = (x - x_j)\ell_j^2(x)$$

误差

定理 (Hermite 插值的误差)

假设函数 f 具有 $2n+2$ 阶导数，则存在 ξ 使得

$$f(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\Big((x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)\Big)^2$$

将作为作业题。

提示：考虑 $\varphi(t) = f(t) - H_{2n+1}(t) - K(x)\omega_{n+1}^2(t)$；参考拉格朗日插值的误差估计。

特例：三次 Hermite 插值

考虑 $n=1$，并取节点 x_k, x_{k+1}，则我们希望

$$H_3(x_k)=f_k \qquad H_3(x_{k+1})=f_{k+1} \qquad H_3'(x_k)=f_k' \qquad H_3'(x_{k+1})=f_{k+1}'$$

通过上述的公式可改写出：

$$H_3(x)=f_k\alpha_k^{(1)}(x)+f_{k+1}\alpha_{k+1}^{(2)}(x)+f_k'\beta_k^{(1)}(x)+f_{k+1}'\beta_{k+1}^{(2)}(x)$$

$$\begin{aligned}
\alpha_k^{(1)}(x) &= \left(1+2\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)\left(\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)^2 \\
\alpha_{k+1}^{(2)}(x) &= \left(1+2\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)\left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)^2 \\
\beta_k^{(1)}(x) &= (x-x_k)\left(\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)^2 \qquad \beta_{k+1}^{(2)}(x)=(x-x_{k+1})\left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)^2
\end{aligned} \tag{1}$$

例题 2.5

例

求满足 $P(x_j) = f(x_j)$ $(j = 0, 1, 2)$ 以及 $P'(x_1) = f'(x_1)$ 的插值多项式（次数不超过 3）。

其余项表达式可参见课本例题 2.5 的解。

目录

分段三次 Hermite 插值

在 $x_k \le x \le x_{k+1}$ ，假设我们知道 $f_k' \equiv f'(x_k)$ 的数据。

我们用三次 Hermite 插值：

- $I_h(x)$ 连续可导
- $I_h(x_k) = f_k \quad I_h'(x_k) = f_k'$
- $I_h(x)$ 在 $[x_k, x_{k+1}]$ 上为三次多项式

该分段函数 I_h 可写成 [1]

$$I_h(x) = \sum_{j=0}^{n} f_j\, \tilde{\alpha}_j(x) \; + \; f_j'\, \tilde{\beta}_j(x)$$

[1] $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ 的表达式可参见课本 (2.7.7), (2.7.8)

在 $x_k \le x \le x_{k+1}$.

$$I_h(x) = f_k \alpha_k^{(1)}(x) + f_{k+1}\alpha_{k+1}^{(2)}(x) + f_k' \beta_k^{(1)}(x) + f_{k+1}' \beta_{k+1}^{(2)}(x)$$

其中基函数的表达式为（又参见公式(1)）

$$\alpha_k^{(1)}(x) = \left(1 + 2\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right)\left(\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}\right)^2$$

$$\alpha_{k+1}^{(2)}(x) = \left(1 + 2\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}\right)\left(\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right)^2$$

$$\beta_k^{(1)}(x) = (x - x_k)\left(\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}\right)^2 \qquad \beta_{k+1}^{(2)}(x) = (x - x_{k+1})\left(\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right)^2$$

可验证 $\left|\beta_k^{(1)}\right|, \left|\beta_{k+1}^{(2)}\right| \leqslant \frac{4}{27}h_k$, $\alpha_k^{(1)} + \alpha_{k+1}^{(2)} = 1$。

误差分析：f 的四阶导数存在且有阶

若 $f^{(4)}$ 存在且有界，我们可以说明分段 Hermite 插值为 4 阶算法。

在区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上，三次 Hermite 插值的误差估计告诉我们：

$$
\begin{aligned}
|I_h(x) - f(x)| &= \left| \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \big((x - x_k)(x - x_{k+1})\big)^2 \right| \\
&\leq \Big(\frac{\max_{a \leq x \leq b} \left| f^{(4)}(x) \right|}{4! \cdot 16} \Big) h^4
\end{aligned}
$$

由于该结果对于任何的 $x \in [a, b]$ 都对，

$$
\| I_h - f \|_\infty \leq \Big(\frac{\max_{a \leq x \leq b} \left| f^{(4)}(x) \right|}{4! \cdot 16} \Big) h^4
$$

(若只有一阶导数的上界，我们也可以做类似分析；见该讲义的附录部分。)

目录

总结

背景：由于龙格现象，高次的多项式做插值近似有时不太适合。

分段插值部分：

- 掌握线性插值的表达式、误差近似的阶数的含义，以及误差估计
- 掌握 Hermite 插值的问题来源、构造原理、误差估计
- 掌握对分段三次 Hermite 插值的误差估计

分段线性的误差估计 (II)

当 $x \in [x_k, x_{k+1}]$ 时，

$$
\begin{aligned}
f(x) =& f(x)\left(\tilde{\ell}_k(x) + \tilde{\ell}_{k+1}(x)\right) \\
I_h(x) =& y_k \tilde{\ell}_k(x) + y_{k+1}\tilde{\ell}_{k+1}(x)
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
|f(x) - I_h(x)| \leq & |f(x) - y_k|\, \tilde{\ell}_k(x) + |f(x) - y_{k+1}|\, \tilde{\ell}_{k+1}(x) \\
\leq & \omega(h)\left(\tilde{\ell}_k(x) + \tilde{\ell}_{k+1}(x)\right) = \omega(h)
\end{aligned}
$$

其中

$$
\omega(h) := \max\{|f(x) - f(y)| : \ x, y \in [a, b], \ |x - y| \leq h\}
$$

它的名字叫连续模。

由前面可知

$$\max_{a\le x\le b} |f(x) - I_h(x)| \le \omega(h) \quad \Longrightarrow \quad \|f - I_h\|_\infty \le \omega(h).$$

那么连续模该如何理解呢?

(i) 若 f 为 Lipschitz，则 $\omega(h) \le Lh$

(ii) 若 f 可导，且 $\max_{a\le x\le b} |f'(x)| \le L$，则 $\omega(h) \le Lh$

(iii) 若 $f \in C[a,b]$ 仅仅是连续函数，我们也能说明 $\lim_{h\to 0} \omega(h) = 0$
（该结论的证明不要求）

定理

对于上述三种情况 *(i), (ii), (iii)*，我们皆有：

当 $h \to 0$ 时，分段线性插值函数 I_h 一致收敛到 f 。

分段三次 Hermite 插值的误差分析 (II)

由于

$$
\begin{aligned}
I_h(x) &= f_k\alpha_k^{(1)}(x) + f_{k+1}\alpha_{k+1}^{(2)}(x) + f_k'\beta_k^{(1)}(x) + f_{k+1}'\beta_{k+1}^{(2)}(x) \\
f(x) &= f(x)\alpha_k^{(1)}(x) + f(x)\alpha_{k+1}^{(2)}(x)
\end{aligned}
$$

相减可知

$$
\begin{aligned}
&|f(x) - I_h(x)| \leq \omega(h) + |f_k'| \left|\beta_k^{(1)}(x)\right| + \left|f_{k+1}'\right| \left|\beta_{k+1}^{(2)}(x)\right| \\
&\leq \omega(h) + \frac{4}{27}h_k \left(|f_k'| + \left|f_{k+1}'\right|\right) \leq \omega(h) + \frac{8}{27}h \max_{0\leq k\leq n} |f_k'|
\end{aligned}
$$

最终可知

$$
\|f - I_h\|_\infty \leqslant \omega(h) + \frac{8h}{27} \max_{0\leq k\leq n} |f_k'|
$$

若 $f \in C^1[a,b]$，且 $\max\limits_{a \le x \le b} |f'(x)| \le M$，则 $\omega(h) \le Mh$

由前面的公式可知

$$\|f - I_h\|_\infty \le Mh + \frac{8h}{27}M = hM(1 + \frac{8}{27})$$

因此，分段 Hermite 插值 I_h 一致收敛到 f。