第四章：插值与逼近

第一部分：多项式插值

目录

问题来源

由于实验数据是有限的、可能缺失部分数据等，我们需要预测函数在非数据部分的函数值。

比如：潜水员测试了在水深 20, 40, 60 米的水温，我们需要预测在水下 30 米的水温。

方法： 使用插值法得到一个近似函数：

- 比如我们使用多项式来近似，
- 或者使用一条直线将相邻的数据串联起来（分段线性插值）。

那我们需要解决什么问题?

- 近似的函数是什么类型？近似函数的表达式是什么？
- 近似的**误差**是什么？

定义

设函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有定义, 且已知在点 $a \leqslant x_0 \leqslant x_1 < \cdots < x_n \leqslant b$ 上的值 $y_0, y_1, \cdots, y_n$。若存在函数 $P(x)$, 使

$$P(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, \cdots, n)$$

则称

- $P(x)$ 为 $f(x)$ 的**插值函数**
- 点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 称为**插值节点**
- 区间 $[a, b]$ 称为**插值区间**
- 求插值函数 $P(x)$ 的方法称为**插值法**

若 $P(x)$ 是次数不超过 n 的代数多项式，即 $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, 其中 a_i 为实数, 就称 $P(x)$ 为**插值多项式**, 相应的插值法称为**多项式插值**; 若 $P(x)$ 为分段的多项式，就称之为**分段插值**。

在插值这部分

多项式插值

- Lagrange 插值
- Newton 插值

分段插值

- 分段线性插值
- Hermite 插值、分段三次 Hermite 插值

三次样条插值

目录

测试

假设我们有数据点 $y_i = f(x_i)$ $(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$，即具有 $n+1$ 个限制条件，并使用多项式来插值，我们需要几次多项式?

(A) $n-1$

(B) n

(C) $n+1$

插值多项式存在且唯一

n 阶多项式的一般形式为 $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots a_n x^n$。

为了满足插值条件:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n = y_0, \\ a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_1^n = y_1, \\ \qquad \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

可以改写成:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$
\begin{aligned}
V_n\left(x_0, x_1, \cdots, x_n\right) = & \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} \\
= & V_n\left(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}\right)\left(x_n - x_0\right)\left(x_n - x_1\right)\cdots\left(x_n - x_{n-1}\right) \qquad \text{(见作业 1 第 6 题 (3))} \\
= & \cdots \\
= & \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=0}^{i-1}\left(x_i - x_j\right) \neq 0
\end{aligned}
$$

因而，Vandermonde 矩阵是非奇异的，存在性和唯一性得证。

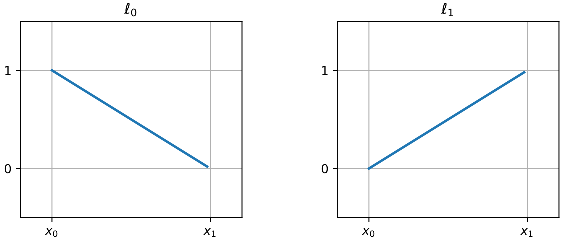
我们理论上可通过解方程组(1)得到系数，但我们有更加直接的表达式吗?

观察： 考虑直线的两点式

$$P_1(x) = \underbrace{\frac{x_1 - x}{x_1 - x_0}}_{\ell_0(x)} y_0 + \underbrace{\frac{x_0 - x}{x_0 - x_1}}_{\ell_1(x)} y_1$$

其中 $\ell_0(x)$ 和 $\ell_1(x)$ 可以看成是两个基函数，它们满足

$$\ell_0(x_0) = 1 \qquad \ell_0(x_1) = 0$$
$$\ell_1(x_0) = 0 \qquad \ell_1(x_1) = 1$$



对于一般的 $n+1$ 个点，我们能否找到

$$P_n(x) = \ell_0(x)y_0 + \ell_1(x)y_1 + \cdots + \ell_n(x)y_n$$

问题：我们类似需要基函数 ℓ_k 满足什么条件呢?

$\ell_0(x)$ 需要满足 $\ell_0(x_i) = 0$ 对于任意 $i = 1, 2, \cdots, n$，所以其必须满足

$$\ell_0(x) = A(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$$

又为了满足 $\ell_1(x_0) = 1$，我们需要

$$A = \frac{1}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\cdots(x_0 - x_n)}$$

故而

$$\ell_0(x) = \prod_{j \neq 0} \frac{x - x_j}{x_0 - x_j}$$

Lagrange 插值多项式

对于使用 n 次多项式 P 来对于 $n+1$ 个数据点插值，多项式 P 具有形式

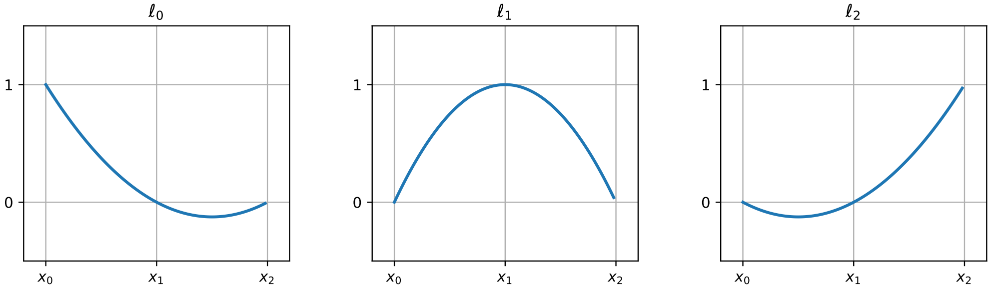
$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} \ell_i(x)\ y_i$$

其中

$$\ell_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$n = 2$ 的基函数

若考虑节点 x_0，x_1，x_2



插值多项式的误差

定理 (定理 2.2)

假设 $f^{(n)}(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $f^{(n+1)}(x)$ 在 (a,b) 内存在, 节点 $a \leqslant x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leqslant b$, $P_n(x)$ 是 n 次插值多项式，则对于任何 $x \in [a,b]$，插值余项

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

这里 $\omega_{n+1}(x)$ 的表达式是

$$\omega_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n),$$

$\xi \in (a,b)$ 且依赖于 x。

(证明请参考课本或者课内)

若我们可估计

$$\max_{a \le x \le b} \left| f^{(n+1)}(x) \right| = M_{n+1}$$

则误差的上界为

$$|R_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)|$$

若可以进一步估计 $|\omega_{n+1}(x)|$ 的上界，甚至可以得到与节点无关的误差限。

例 2.1

已知 $\sin 0.32 = 0.314567$，$\sin 0.34 = 0.333487$。

用线性插值计算 $\sin 0.3367$ 的值，并估计截断误差。

例题

对于 $\sin$ 函数，考虑区间 $[0,\pi]$，证明当取的点数 $n\to\infty$，对任何区间内的 x

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$$

目录

背景

Lagrange 插值中，我们每次增加一个点，需要重新计算全部基函数。能否不断地在原基础上更新呢?

假设我们用一个 0 次函数:

$$P_0(x) = f_0$$

如果增加一个数据点 (x_1, f_1)，

$$P_1(x) = f_0 + F(x)$$

其中 F 是某个一次函数。

问题: F 需要满足什么条件?

假设我们使用一次多项式，除了直线的两点式，我们也可以使用点斜式：

$$P_1(x) = f_0 + \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

如果我们有三个点呢？新的插值多项式 P_2 一定可以写成：

$$P_2(x) = P_1(x) + F(x) \qquad F\text{是某个二次多项式}$$

由于 $f_0 = P_2(x_0) = F(x_0) + f_0$，$f_1 = P_2(x_1) = F(x_1) + f_1$。因而 x_0 和 x_1 是 F 的零点，

$$F(x) = a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

通过信息 $P_2(x_2) = f_2$，我们可验证

$$a_2 = \frac{\frac{f_2 - f_0}{x_2 - x_0} - \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_1}$$

0 次多项式：$P_0(x) = f_0$

一次多项式：$P_1(x) = f_0 + a_1(x - x_0)$ 其中

$$a_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$$

二次多项式：$P_2(x) = f_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$，其中

$$a_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} \qquad a_2 = \frac{\frac{f_2 - f_0}{x_2 - x_0} - \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_1}$$

似乎我们有必要引入一个概念：**一阶差商**

$$f[x_0, x_1] \overset{\text{定义}}{=} \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$$

故而

$$a_1 = f[x_0, x_1] \qquad a_2 = \frac{f[x_0, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_1}$$

此处的 a_2 似乎也具有一阶差商的结构，故而定义其为二阶差商。

对于更一般情况，我们定义

定义 (k 阶差商)

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \frac{f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-2}, x_k] - f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-2}, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-1}}$$

性质 1

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \sum_{j=0}^{k} \frac{f(x_j)}{(x_j - x_0)\cdots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\cdots(x_j - x_k)}$$

证明.

可用数学归纳法证明。 □

注意点：该结果说明了差商的**对称性**以及**和节点次序无关**。

性质 2

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}, x_k] = \frac{f[x_1, \cdots, x_{k-1}, x_k] - f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

证明.

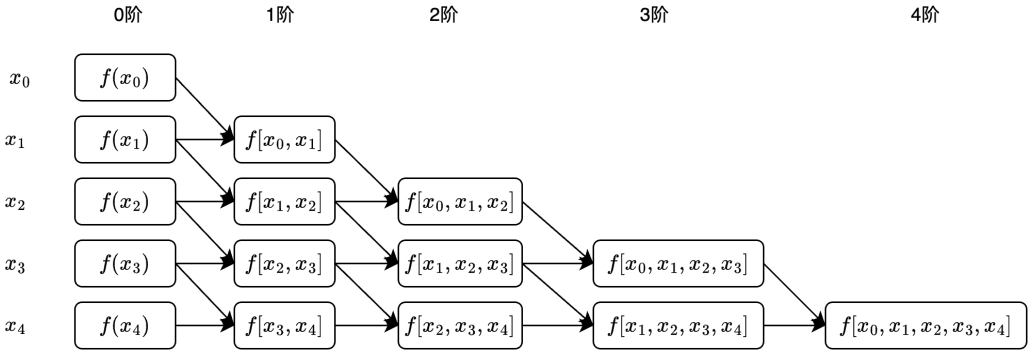
$$\begin{aligned}
f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}, x_k] &\overset{\text{性质 1}}{=} f[x_1, \cdots, x_{k-1}, x_0, x_k] \\
&\overset{\text{定义}}{=} \frac{f[x_1, \cdots, x_{k-1}, x_k] - f[x_1, \cdots, x_{k-1}, x_0]}{x_k - x_0} \\
&\overset{\text{性质 1}}{=} \frac{f[x_1, \cdots, x_{k-1}, x_k] - f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}
\end{aligned}$$

$\square$

练习

假设函数 $f(x) = x^2$，请计算 $f[1, 2, 4]$。

差商的计算



0阶
1阶
2阶
3阶
4阶
x_0
x_1
x_2
x_3
x_4
$f(x_0)$
$f(x_1)$
$f(x_2)$
$f(x_3)$
$f(x_4)$
$f[x_0, x_1]$
$f[x_1, x_2]$
$f[x_2, x_3]$
$f[x_3, x_4]$
$f[x_0, x_1, x_2]$
$f[x_1, x_2, x_3]$
$f[x_2, x_3, x_4]$
$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$
$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$

牛顿插值法的证明

假设我们取任意的 x，但是目前暂时固定 x，

$$
\begin{aligned}
f(x) =& f(x_0) + f[x_0, x](x - x_0) \\
=& f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x](x - x_0)(x - x_1) \\
=& f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\
& \quad + f[x_0, x_1, x_2, x](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\
=& \cdots \\
=& P(x) + R(x)
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
P(x) =& f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \\
& \cdots + f[x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})
\end{aligned}
$$

$$
R(x) = f[x_0, x_1, \cdots, x_n, x](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)
$$

牛顿插值法的证明

- 由于 $R(x_i) = 0$ $(i = 0, 1, 2, \cdots n)$，可知 $P(x_i) = f(x_i)$，因而 P 是一个 n 次插值多项式
- 在 Lagrange 部分，我们已经证明这样的 n 次多项式是唯一的
- 其中 $R(x)$ 是余项

性质 3

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \qquad \xi \in [a, b]$$

证明.

$$\begin{aligned} & f[x_0, x_1, \cdots, x_n, x](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n) = R(x) \\ = & \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n) \end{aligned}$$

对比可知性质 3。 □

总结

Langrage 插值是直线两点式的拓展

Newton 插值是直线点斜式的拓展

相同点：近似的多项式 P 相同

不同点：

- Langrage 增加点数后需要重新计算基函数
- Newton 法引入差商的概念

目录

原始的函数为 f，插值函数为 P，我们希望理解两个函数的距离是多少，即理解方法的近似效能

我们需要理解的问题是：

- 函数空间是什么？
- 距离的量化指标是什么？

函数

考虑区间 $[a, b]$

- 连续函数的集合标记为 $C[a, b]$
- 若函数有一次导数且一次导数是连续函数的集合标记为 $C^1[a, b]$
- 若函数有 k 次导数且其 k 次导数是连续函数的集合标记为 $C^k[a, b]$
- 在闭区间上的连续函数是有界的（证明不要求）

函数的范数

类似于向量有大小，函数也可以有“ 大小 ”

类比于向量，我们可以对于任何 $p \in [1, \infty)$ 来定义：

$$\|f\|_p \stackrel{\text{定义}}{=} \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$$

$$\|f\|_\infty \stackrel{\text{定义}}{=} \max_{a \le x \le b} |f(x)|$$

类似的，我们有三角不等式：

$$\|f+g\| \le \|f\| + \|g\|$$

类比于如何定义两个数字、两个向量之间的距离，我们可以引入

$$D_\infty(f,g) = \|f-g\|_\infty = \max_{a\le x\le b} |f(x)-g(x)|$$

$$D_2(f,g) = \|f-g\|_2 = \left(\int_a^b (f(x)-g(x))^2\, dx\right)^{1/2}$$

假设函数 f 和序列 $\{f_n\}_{n=0}^\infty = f_0, f_1, \cdots, f_n, \cdots\cdots$ 定义在 $[a,b]$ 区间上，

- 对于任何 $x \in [a,b]$, 若我们知道 $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$，则我们说 $\{f_n\}$逐点收敛到 f

我们为什么需要这个定义?

比如，我们需要刻画在使用高阶多项式近似时，误差是否变成 0，即 $f_n(x)$ 是否收敛到 $f(x)$

问题：如果需要 f_n 在整个区间上每个点都以类似速度接近 f，怎么刻画?

f_n 和 f 在任何点 x 的距离都不超过 $D_\infty(f_n, f) = \|f_n - f\|_\infty$

因此，我们仅仅需要看是否 $\lim_{n\to\infty} D_\infty(f_n, f) = 0$.

定义

若 $\lim_{n\to\infty} D_\infty(f_n, f) = 0$，则我们说 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ **一致收敛**到 f

例题：对于以下三个函数序列 $\{R_n\}$，判断是否一致收敛到 $f = 0$?
定义域假设都是 $[0, 1]$:

- 当 $x \in [0, 1/2)$，$R_n(x) = \frac{x}{n}$；当 $x \in [1/2, 1]$, $R_n(x) = 0$
- 当 $x \in [0, 1/n)$, $R_n(x) = 1$；当 $x \in [1/n, 1]$，$R_n(x) = 0$
- 当 $x \in (0, 1/n)$, $R_n(x) = 1$；当 $x \in \{0\} \cup [1/n, 1]$，$R_n(x) = 0$

问题：如果需要 f_n 在整个区间上每个点都以类似速度接近 f，怎么刻画？

f_n 和 f 在任何点 x 的距离都不超过 $D_\infty(f_n, f) = \|f_n - f\|_\infty$

因此，我们仅仅需要看是否 $\lim_{n\to\infty} D_\infty(f_n, f) = 0$.

定义

若 $\lim_{n\to\infty} D_\infty(f_n, f) = 0$，则我们说 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ **一致收敛**到 f

例题：对于以下三个函数序列 $\{R_n\}$，判断是否一致收敛到 $f = 0$?
定义域假设都是 $[0, 1]$:

- 当 $x \in [0, 1/2)$，$R_n(x) = \frac{x}{n}$；当 $x \in [1/2, 1]$, $R_n(x) = 0$
- 当 $x \in [0, 1/n)$, $R_n(x) = 1$；当 $x \in [1/n, 1]$，$R_n(x) = 0$
- 当 $x \in (0, 1/n)$, $R_n(x) = 1$；当 $x \in \{0\} \cup [1/n, 1]$，$R_n(x) = 0$

答案：是，不是，不是

目录

总结

- 掌握 Lagrange 插值的表达式，以及误差估计
- 掌握 Newton 插值的表达式，差商的计算，以及误差估计
- 了解两种不同的函数序列收敛概念，以及函数空间的范数