第五章：数值积分

(3)：高斯求积

目录

在机械求积公式中:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

我们已经学习了 Newton-Cotes，其中该方法固定了 $x_0, x_1, \cdots, x_n$，仅仅考虑找寻最好的 A_k，即

$$A_k = \underline{\hspace{6cm}}$$

若对 x_k, A_k，$(k = 0, 1, 2 \cdots, n)$ 我们不加任何的限制:

我们共有待定系数________ 个，故而我们可以猜测如果我们同时优化 $\{(x_k, A_k)\}_{k=0}^{n}$ 最高可以至少到________ 次代数精度。

目录

定义 (高斯点)

若公式 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f\left(x_k\right)$ 具有 $2n+1$ 次代数精度，则称其节点 $\{x_k\}_{k=0}^{n}$ 为**高斯点**，而这类求积公式被称为**高斯求积公式**

方法 1：联列方程组

假如我们考虑简单情况 $n=0$，未知系数为 x_0, A_0，我们需要

$$\int_a^b 1 \,\mathrm{d}x = A_0 \qquad \int_a^b x \,\mathrm{d}x = A_0 x_0$$

我们可知：

$$A_0 = b - a \qquad x_0 = \frac{1}{2}(a+b)$$

即矩形公式。

考虑情况 $n=1$，我们具有 4 个未知数，我们需要解

$$\int_a^b 1\ \mathrm{d}x = A_0 + A_1 \qquad \int_a^b x\ \mathrm{d}x = A_0x_0 + A_1x_1$$

$$\int_a^b x^2\ \mathrm{d}x = A_0x_0^2 + A_1x_1^2 \qquad \int_a^b x^3\ \mathrm{d}x = A_0x_0^3 + A_1x_1^3$$

我们可以通过软件的辅助得到:

$$x_0 = \frac{1}{6}\left(3a+3b-\sqrt{3}(b-a)\right),\ x_1 = \frac{1}{6}\left(3a+3b+\sqrt{3}(b-a)\right),\ A_0 = A_1 = \frac{1}{2}(b-a)$$

若我们取 $a=-1$，$b=1$，我们可以得到

$$x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad A_0 = A_1 = 1$$

方法 2

我们分两步走：先确定 $x_0, x_1, \cdots, x_n$，再确定 $A_0, A_1, \cdots, A_n$，在这个过程中我们必然希望取

$$A_k = \int_a^b \ell_k(x)\ \mathrm{d}x$$

其中 ℓ_k 是关于节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 的拉格朗日插值多项式的基函数。
因为未知系数为 $x_0, x_1, \cdots, x_n$，我们需要满足对任何的 $f(x) = x^m$ $(n + 1 \leq m \leq 2n + 1)$，具有 $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$

对于任何的 $f(x)=x^m$ （其中 $n+1\le m\le 2n+1$）

$$
\begin{aligned}
0 &\overset{\text{要求}}{=} \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x-\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k)=\int_a^b f(x)-\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\ell_k(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \underbrace{f[x_0,x_1,\cdots,x_n,x]}_{P}\omega(x)\ \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

选 $f(x)=x^{n+1}$, 可知 P 为 0 次多项式，即得到条件 $0=\int_a^b\omega(x)\ \mathrm{d}x$

选 $f(x)=x^{n+2}$，可知 P 为 1 次多项式，即得到条件 $0=\int_a^b x\omega(x)\ \mathrm{d}x$

$\vdots$

选 $f(x)=x^{2n+1}$，可知 P 为 n 次多项式，即得到条件 $0=\int_a^b x^n\omega(x)\ \mathrm{d}x$

因前一页的推理可知:

定理

节点 x_k 为 *Gauss* 点的充要条件为对于任何次数不超过 n 的多项式 P 和 $\omega(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$ 垂直。

假设我们取一个特殊情况 $a=-1,\ b=1$： ω 为 $n+1$ 次多项式，且最高次的项为 x^{n+1}，它又和任何的 n 次多项式垂直，因而，$\omega(x)=\tilde{P}_{n+1}(x)$（即 Legendre 多项式）

因此，对此特例，高斯点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 为 Legendre 多项式 $\tilde{P}_{n+1}$ 的零点

- $P_1(x) = x$ $\quad \Longrightarrow \quad x_0 = 0$

  $\Longrightarrow A_0 = 2$

- $P_2(x) = \frac{3x^2-1}{2}$ $\quad \Longrightarrow \quad x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

  $\Longrightarrow A_0 = A_1 = 1$

- $P_3(x) = \frac{5x^3-3x}{2}$ $\quad \Longrightarrow \quad x_0 = -\frac{\sqrt{15}}{5}, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{\sqrt{15}}{5}$

  $\Longrightarrow A_0 = \frac{5}{9}, \quad A_1 = \frac{8}{9} \quad A_2 = \frac{5}{9}$

目录

高斯求积公式的余项

定理 (高斯求积公式的余项)

$$R(x)=\int_a^b f(x)dx-\sum_{k=0}^{n} A_k f\left(x_k\right)=\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\int_a^b \omega^2(x)\,\mathrm{d}x$$

证明：见课本或课堂

高斯求积公式的稳定性

定理

高斯求积公式的系数 A_k 全是正的。

证明.

$0 < \int_a^b \ell_k^2(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^n A_i \ell_k^2(x_i) = A_k$ $\square$

定理 (稳定性)

若我们使用 f_k^* 来近似 $f(x_k)$，则

$$|I_n^* - I_n| \leq (b-a) \max_{0\leq k\leq n} |f_k^* - f_k|,$$

其中 $I_n^* = \sum_{k=0}^n A_k f_k^*$, $I_n = \sum_{k=0}^n A_k f_k$。

目录

$$\int_a^b \rho(x) f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f\left(x_k\right)$$

Gauss 型：对任意次数不超过 $2n+1$ 的多项式能准确成立

x_k：Gauss 点

x_k 是 Gauss 点的充要条件是任何次数不超过 n 的多项式 P, P 和 $\omega(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$ 在区间 $[a,b]$ 上关于权重函数 ρ 正交。其中，系数

$$A_k = \int_a^b \rho(x)\ \ell_k(x)\,\mathrm{d}x$$

若 $a=-1,\ b=1,\ \rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

这样构造出来的 Gauss 求积公式为 Gauss-Chebyshev 公式

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

由于 $\int_{-1}^{1} \rho(x)P(x)\omega(x)\ \mathrm{d}x=0$ 对任意次数不超过 n 的多项式 P 成立，

$$\int_{-1}^{1} \rho(x)P(x)\Big(\frac{1}{2^n}T_{n+1}(x)+\sum_{k=0}^{n}\alpha_k T_k(x)\Big)\ \mathrm{d}x=0, \qquad \forall P$$

因而，$\omega(x)=\frac{1}{2^n}T_{n+1}(x)$，并且可知 Gauss 点为 $\cos\left(\frac{2k+1}{2(n+1)}\pi\right)$，
$k=0,1,2,\cdots,n$

练习

练习：如何构造对于权函数 $\rho(x)=\sqrt{x}$ 的两点 Guass 求积公式：

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x)\,\mathrm{d}x \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1).$$

请描述你的思路。

目录

总结

- 掌握 Gauss 点的来源，以及第10页的定理
- 掌握 Gauss 求积公式的误差、稳定性
- 了解对于带权重的 Gauss 求积公式