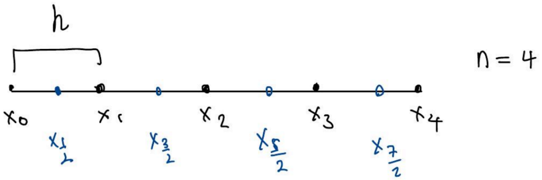
第五章：数值积分

(2)：Richardson 加速

目录

回顾



对于这些节点，梯形公式是

$$T_n = \frac{h}{2}\left(f\left(x_0\right) + 2f\left(x_1\right) + 2f\left(x_2\right) + 2f\left(x_3\right) + f\left(x_4\right)\right)$$

如果精度不够怎么办?（1）增加点数 n；(2) 使用高阶算法

注：本部分的 n 代表复化分段时的分段个数

首先我们考虑增加点数 n:

$$T_{2n} = \frac{1}{2}T_n + \frac{h}{2}\left(\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1/2})\right)$$

问题: 有没有一种方法自动帮我们确定步长的选择?

二分法: 计算 T_n, T_{2n}, $T_{4n}, \ldots$ 等, 并且若

$$|T_{2^{k+1}n} - T_{2^k n}| < \text{误差承受范围}$$

则我们可以终止计算

我们还有更好的办法, 即可以在不增加计算 f 的总节点数, 同时增加近似阶数 (因而提高精度): Romberg 算法

目录

梯形公式在不同步长时的组合

我们已经学习了

$$I - T_n = -\frac{h^2}{12}\left(f'(b) - f'(a)\right) + \mathcal{O}\left(h^3\right)$$

那如果我们截断 h 成一半，则

$$I - T_{2n} = -\frac{h^2}{48}\left(f'(b) - f'(a)\right) + \mathcal{O}\left(h^3\right)$$

那么，我们可以把两者的误差 $\mathcal{O}(h^2)$ 给消掉，通过

$$\frac{1}{4}(I - T_n) - (I - T_{2n}) = \mathcal{O}\left(h^3\right)$$

整理一下可知，

$$I = \frac{4}{3}T_{2n} - \frac{1}{3}T_n + \mathcal{O}\left(h^3\right)$$

注：更确切来说最下方公式的误差应该是 $\mathcal{O}\left(h^4\right)$

对于小区间 $[x_k, x_{k+1}]$，$x_{k+1} = x_k + h$，

$$
\begin{array}{ll}
T_n \text{ 中相关项} & \dfrac{h}{2}\big(f(x_k) + f(x_{k+1})\big) \\
T_{2n} \text{ 中相关项} & \dfrac{h}{4}\big(f(x_k) + 2f(x_{k+1/2}) + f(x_{k+1})\big)
\end{array}
$$

请写出：$\overline{T} = \frac{4}{3}T_{2n} - \frac{1}{3}T_n$ 来源于该区间的项：

$$
h\Big(\boxed{?}\, f(x_k) + \boxed{?}\, f(x_{k+1/2}) + \boxed{?}\, f(x_{k+1})\Big)
$$

答案

$\overline{T}$ 中相关项 $$h\Big(\frac{1}{6}f(x_k)+\frac{4}{6}f(x_{k+1/2})+\frac{1}{6}f(x_{k+1})\Big)$$

所以 $\overline{T}$ 实际上就是 Simpson

我们通过对于梯形公式进行线性组合，我们得到了 Simposon 公式

那么我们对于 Simpson 做类似的组合呢?

$$I - S_n = h^4 \frac{-\int_a^b f^{(4)}(\eta)\ \mathrm{d}\eta}{2880} + \mathcal{O}(h^5)$$

$$I - S_{2n} = \frac{1}{2^4}\ h^4 \frac{-\int_a^b f^{(4)}(\eta)\ \mathrm{d}\eta}{2880} + \mathcal{O}(h^5)$$

我们通过类似的方法可得,

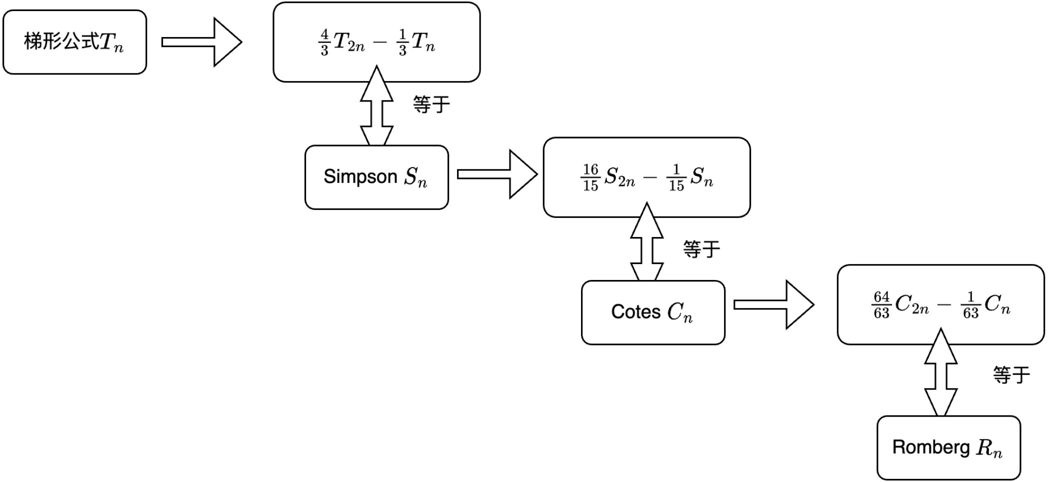
$$I = \frac{16}{15} S_{2n} - \frac{1}{15} S_n + \mathcal{O}(h^5)$$

我们可验证,复化求积公式 $\frac{16}{15} S_{2n} - \frac{1}{15} S_n$ 其实就是 Cotes 公式 C_n

类似地,我们可得,

$$R_n = \frac{64}{63} C_{2n} - \frac{1}{63} C_n \qquad \text{(Romberg 公式)}$$

Richardson 外推加速法



练习

问题：　若使用 $I - T_n$ 和 $I - T_{3n}$ 的组合，我们可以构造一个什么算法?

练习

问题： 若使用 $I - T_n$ 和 $I - T_{3n}$ 的组合，我们可以构造一个什么算法?

答案：我们会构造 $\frac{-1}{8}T_n + \frac{9}{8}T_{3n}$ 作为我们新的估计

目录

1. 背景
2. Richardson 外推加速法
3. Romberg 算法

猜测

对于一般的 $m = 1, 2, \cdots$,

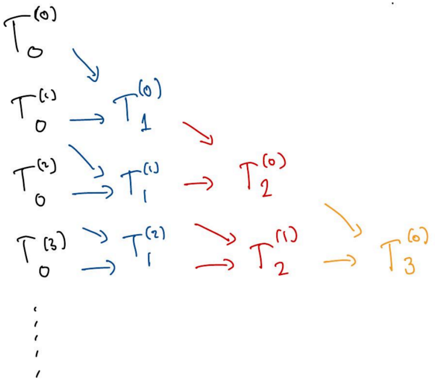
$$\mathcal{T}_m(h) = \frac{4^m}{4^m - 1}\mathcal{T}_{m-1}\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{1}{4^m - 1}\mathcal{T}_{m-1}(h)$$

m	公式	误差
$m = 0$	$\mathcal{T}_0(h)$ 为使用区间宽度 h 的梯形公式	$\mathcal{O}(h^2)$
$m = 1$	$\mathcal{T}_1$ 为 Simpson	$\mathcal{O}(h^4)$
$m = 2$	$\mathcal{T}_2$ 为 Cotes	$\mathcal{O}(h^6)$
$m = 3$	$\mathcal{T}_3$ 为 Romberg	$\mathcal{O}(h^8)$

考虑区间 $[a, b]$, 我们一直二分小区间，$\mathcal{T}_0^{(k)}$，其中 0 代表梯形公式，k 为二分区间的个数

根据前面的猜想，我们稍微修改一下符号，取 $h = (b-a)/2^k$，则

$$\mathcal{T}_m^{(k)} = \frac{4^m}{4^m - 1}\mathcal{T}_{m-1}^{(k+1)} - \frac{1}{4^m - 1}\mathcal{T}_{m-1}^{(k)}$$



定理

- 每一列的极限为 I，即 $\lim_{k\to\infty} T_m^{(k)} = I$
- 对角线的计算为 I，即 $\lim_{m\to\infty} T_m^{(0)} = I$

Algorithm 1: Romberg 算法

```
准备初值，计算 T_0^(0) = (b-a)/2 (f(a) + f(b));
k = 1
while k < k_max do
    计算梯形值 T_0^(k)
    按前面公式对于第 k+1 行逐个计算，
     直到 T_k^(0)
    if |T_k^(0) - T_(k-1)^(0)| < ϵ then
        break
    end
    k = k + 1
end
```

$T_0^{(0)} = \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$; while $k < k_{\max}$; if $\left|T_k^{(0)} - T_{k-1}^{(0)}\right| < \epsilon$ then

---

对于该方法的严格证明依赖梯形公式误差的展开

$$I - T_n = -\frac{h^2}{12}\left(f'(b) - f'(a)\right) + \sum_{k=2}^{\infty} C_k h^{2k}, \qquad C_k\text{是和}h\text{无关的常数}$$

总结

- 理解 Richardson 外推加速法的核心思想
- 能用 Romberg 算法计算具体问题