第二章：方程求根

第 (2) 部分：牛顿法和弦截法

目录

回顾：上节课我们考虑了对于 $f(x)=0$，如何使用对于 $\varphi(x)=f(x)+x$ 的迭代法来近似。

练习 1：误差 $\log e_N$ 和迭代次数呈现什么关系？

练习 2：迭代法的收敛速度是由什么量决定的？假设我们标记真实解为 x^*（即 $f(x^*)=0$）：

(A) $1+f(x^*)$

(B) $1+f'(x^*)$

(C) $1+f''(x^*)$

回顾：上节课我们考虑了对于 $f(x)=0$，如何使用对于 $\varphi(x)=f(x)+x$ 的迭代法来近似。

练习 1：误差 $\log e_N$ 和迭代次数呈现什么关系？

练习 2：迭代法的收敛速度是由什么量决定的？假设我们标记真实解为 x^*（即 $f(x^*)=0$）：

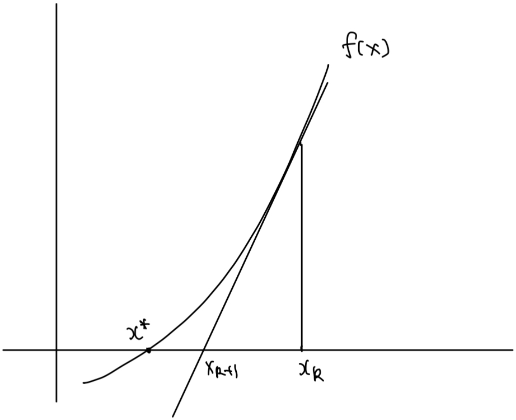
(A) $1+f(x^*)$

(B) $1+f'(x^*)$

(C) $1+f''(x^*)$

答案：B

牛顿法



由于几何解释，
又名切线法

假设 $x_k \approx x^*$，

$$0 = f(x^*) \approx f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k)$$

通过解方程可知

$$x^* \approx x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

因而我们可以猜测

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

会接近真实值，该方法即牛顿法。

直接的迭代法：仅仅使用 $f(x)$ （或者 $\varphi(x)$）的函数值。

牛顿法：使用了 $f(x)$ 和 $f'(x)$。

问题 1：你能否通过直觉猜测哪个方法更有希望更好?

目录

回顾

直接的迭代法的收敛速度为

$$\log(e_N) \approx \log(e_k) + (N-k)\log|\varphi'(x^*)|$$

问题 2：那么牛顿法在 $x_k \approx x^*$ 时，即在真解附近的表现是什么？

牛顿法

牛顿法是 $x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$。若 $x_k\approx x^*$，我们可知

$$x_{k+1}-x^*=x_k-\underbrace{\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}_{=:g(x_k)}-x^*+\underbrace{\frac{f(x^*)}{f'(x^*)}}_{=:g(x^*)}$$

$$\approx(x_k-x^*)-\left(g'(x^*)(x_k-x^*)+\frac{g''(x^*)}{2}(x_k-x^*)^2\right)\text{对 } g(x_k) \text{ 做泰勒展开}$$

$$\approx-\frac{g''(x^*)}{2}(x_k-x^*)^2$$

所以，误差的迭代过程为

$$e_{k+1}\approx Ce_k^2,\qquad C=\left|\frac{g''(x^*)}{2}\right|$$

（g'' 换成 f 的表达式挺复杂的，暂时省略了。）

问题 3：$e_{k+1} \approx Ce_k^2$ 的实际含义是什么呢？

$$\underbrace{\log e_{k+1}}_{\text{标记为}y_{k+1}} \approx \log(C) + 2\underbrace{\log e_k}_{\text{标记为}y_k}$$

因而

$$y_{k+2} \approx \log(C) + 2y_{k+1} \approx \log(C) + 2\Big(\log(C) + 2y_k\Big)$$

对于一般的 $N > k$，

$$\begin{aligned} y_N &\approx (1 + 2 + \cdots + 2^{N-k-1})\log(C) + 2^{N-k}y_k \\ &= \frac{2^{N-k} - 1}{(2-1)}\log(C) + 2^{N-k}y_k \end{aligned}$$

若 $\log(C) + y_k < 0$，则当 $N \to \infty$，$y_N \to -\infty$，即 $e_N \to 0$。

问题 4：为什么该条件或者假设可以满足？

并且 $y_N \approx 2^{N-k}\Big(\log(C) + y_k\Big) < 0.$

我们考虑

$$-y_N \approx 2^{N-k} \underbrace{D}_{\text{某个正数}}$$

$$\log(-y_N) \approx (N-k)\log(2) + \log(D)$$

大致意思就是

$$\underbrace{\log\Big(-\log(e_N)\Big)}_{=\log\log(1/e_N)} \approx (N-k)\log(2) + \log(D)$$

对于牛顿法，$\log\log(1/e_N)$ 是关于 N 的一次函数。

而对于普通的迭代法 $\log(1/e_N)$ 是关于 N 的一次函数。
【这里我们解释了问题 3 的答案】

回顾问题 4

$\log(C) + y_k = \log(C) + \log(e_k)$ 为什么能保证是负数?

答案：我们先假设通过一些迭代 e_k 足够小（无论是由于初值选择很巧，或者由于一段迭代时间后产生这个效果），$\log(e_k)$ 是一个绝对值很大的负数，而 $\log(C)$ 是某个常数，只要 e_k 足够小，就能实现 $\log(C) + y_k < 0$。

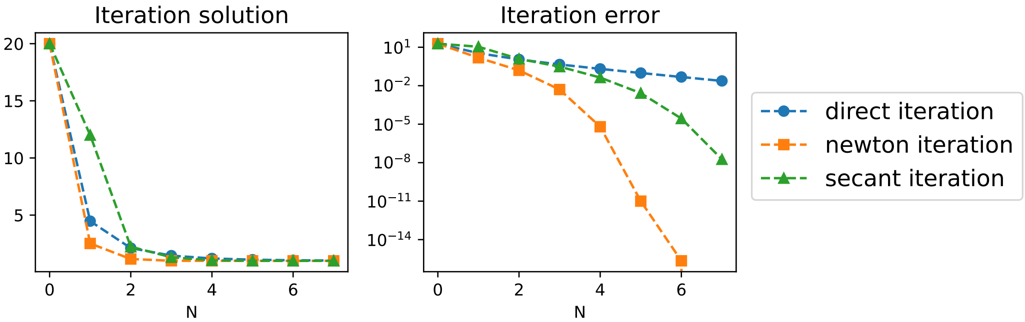
因而我们可以得到如下重要结论。

牛顿法在真解附近的小区间内一定收敛:

若 $f'(x^*) \neq 0$，$f''(x^*) \neq 0$，且初值 x_0 足够接近 x^*，则牛顿法一定会收敛。

提示：对于普通的迭代法，哪怕初值 x_0 足够接近 x^*，迭代法不一定收敛!

例子：$\varphi(x) = \sqrt{|x|}$，或者说 $f(x) = \sqrt{|x|} - x$。



一般的收敛阶数

定义

对于任意的 $p \geq 1$，假设迭代过程 $x_{k+1} = F(x_k)$ 收敛于方程 $x = F(x)$ 的根 x^* 。若迭代误差 $e_k = |x_k - x^*|$ 在 $k \to \infty$ 时满足

$$\lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^p} = C \neq 0 \qquad \left(e_k\text{很小时，} e_{k+1} \approx Ce_k^p\right)$$

且若 $p = 1$ 时，$|C| < 1$，则称该迭代过程为 p 阶收敛。

- 当 $p = 1$，线性收敛
- 当 $p > 1$，超线性收敛
- 当 $p = 2$，平方收敛

收敛阶数的含义

普通迭代法	一阶收敛	$\log\left(\frac{1}{e_N}\right)$ 为关于 N 的一次函数
Newton 法	2 阶收敛/平方收敛	$\log\left(\log\left(\frac{1}{e_N}\right)\right) \approx N\log(2)+\beta$
一般情况的算法	p 阶收敛	$\log\left(\log\left(\frac{1}{e_N}\right)\right) \approx N\log(p)+\beta_p$

其中 β 和 β_p 是一些和 N 无关的常数。

收敛阶数的判定法

定理 ($p \geq 2$ 阶收敛的一个判定法)

对于迭代法 $x_{k+1} = F(x_k)$，如果 $F^{(p)}(x)$ 在 x^* 附近连续，且

$$F'(x^*) = F''(x^*) = \cdots = F^{(p-1)}(x^*) = 0$$
$$F^{(p)}(x^*) \neq 0$$

则该迭代过程在点 x^* 附近是 p 阶收敛。

练习： 使用该结果来简化/改写一下之前提到的牛顿法是二阶收敛的证明。

目录

Newton 法的应用 1：解开方值

对于某个 $a > 0$，目标是求 $\sqrt{a} \longleftrightarrow x^2 - a = 0$。
应用 Newton 法

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2 - a}{2x_k} = \boxed{\tfrac{1}{2}\left(x_k + \frac{a}{x_k}\right)}$$

假设 $x_0 > 0$ 则我们可以证明 $\lim_{k\to\infty} x_k = \sqrt{a}$

答案

迭代法是 $x_{k+1}-\sqrt{a}=\frac{1}{2}\left(x_k+\frac{a}{x_k}\right)-\sqrt{a}=\frac{1}{2x_k}\left(x_k^2-2\sqrt{a}x_k+a\right)=\frac{\left(x_k-\sqrt{a}\right)^2}{2x_k}$。
类似可知，$x_{k+1}+\sqrt{a}=\frac{1}{2x_k}\left(x_k+\sqrt{a}\right)^2$

$$\Rightarrow \left(\frac{x_{k+1}-\sqrt{a}}{x_{k+1}+\sqrt{a}}\right)=\left(\frac{x_k-\sqrt{a}}{x_k+\sqrt{a}}\right)^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{x_k-\sqrt{a}}{x_k+\sqrt{a}}}_{q_k}=\Bigg(\underbrace{\frac{x_0-\sqrt{a}}{x_0+\sqrt{a}}}_{=:q}\Bigg)^{2^k}$$

因此，$x_k-\sqrt{a}=\frac{2q_k}{1-q_k}\sqrt{a}=2\sqrt{a}\frac{q^{2^k}}{1-q^{2^k}}$。由于 $x_0>0$，$|q|<1$，我们可知 $\lim_{k\to\infty}q_k=0$，因此进而知道 $\lim_{k\to\infty}x_k-\sqrt{a}=0$。

Newton 法的应用 2：求倒数

练习：对于 $f(x) = \frac{1}{x} - a$ ，我们希望求 $f(x) = 0$。

(1) 对于该问题，牛顿法给予的迭代表达式是什么？ ________

(2) 若令 $r_k = 1 - ax_k$，则 r_{k+1} 和 r_k 关系是什么？ ________

(3) 在 ________ 条件下，迭代会收敛且速度为 ________ 阶。

注：该方法曾在早期被应用于求 $\frac{1}{a}$ 。答案又可见课本第 6.3.4 节。

目录

牛顿法可能失灵或收敛变慢

问题：对于 $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$，最有可能造成牛顿法的困扰的原因是什么？

牛顿法可能失灵或收敛变慢

问题：对于 $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$，最有可能造成牛顿法的困扰的原因是什么？

例子 1：$f'(x^*)$ 不存在，如 $f(x) = |x|^{1/3}$。

我们通过计算可知 $x_{k+1} = x_k - 3\text{sign}(x_k)|x_k|$，因而，若 $x_k \neq 0$，则 $x_{k+1} = -2x_k$。对此，我们可以显然得到结论：牛顿法对该问题会失效。

牛顿法可能失灵或收敛变慢

问题：对于 $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$，最有可能造成牛顿法的困扰的原因是什么？

例子 1：$f'(x^*)$ 不存在，如 $f(x) = |x|^{1/3}$。

我们通过计算可知 $x_{k+1} = x_k - 3\text{sign}(x_k)|x_k|$，因而，若 $x_k \neq 0$，则 $x_{k+1} = -2x_k$。对此，我们可以显然得到结论：牛顿法对该问题会失效。

练习 2：（有重根的情况 $f'(x^*) = 0$）例如 $f(x) = \alpha x^2$，$\alpha > 0$。请证明牛顿法的收敛速度是一阶（即收敛实际无法达到前面描述的二阶）。

牛顿下山法

若 x_0 偏离 x^*，牛顿法可能会发散，因而人们发明了牛顿下山法

例子： $f(x) = x^3 - x - 1$（请见代码）

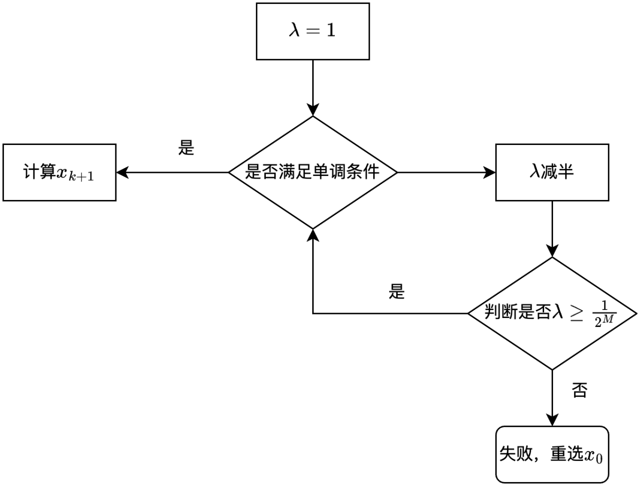
牛顿下山法：我们希望 $|f(x_{k+1})| < |f(x_k)|$（单调性条件）

$$\bar{x}_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$x_{k+1} = \lambda \bar{x}_{k+1} + (1-\lambda) x_k \qquad \lambda \in (0,1] \text{为下山因子.}$$

我们可以调整 λ（比如通过线性搜索）来实现单调性条件。

牛顿下山法：流程图


$\lambda = 1$
是否满足单调条件
是
计算x_{k+1}
λ减半
判断是否$\lambda \geq \frac{1}{2^M}$
是
否
失败，重选x_0

目录

弦截法：产生的原因和设计思路

问题来源和诉求：当 f 很复杂时，在牛顿法中 f' 不好求。

回顾牛顿法的思路:

$f(x) \approx f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) \rightarrow$ 变成某个多项式 $P_r(x)$

求解 $f(x) = 0$ 的近似值 $\rightarrow$ 变成求解 $P_r(x) = 0$

$f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) = 0$

$\rightarrow x = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

其中 P_r 是关于历史预测数据的一个插值函数。

假设 x_k，x_{k-1} 是 $f(x)=0$ 的近似根。

视角 1：我们可以连列方程组

$$\begin{aligned} 0 = f(x_*) &\approx f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) \\ f(x_{k-1}) &\approx f(x_k) + f'(x_k)(x_{k-1} - x_k) \end{aligned}$$

通过解方程组来将 $f'(x_k)$ 消元，

$$x^* \approx x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1})$$

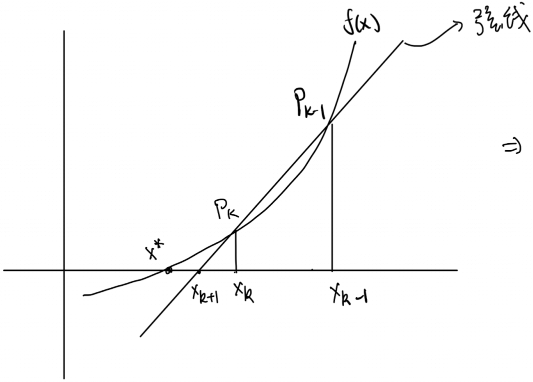
因而提出迭代法：

$$x_{k+1} := x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1})$$

视角 2：使用点斜式

$$P_1(x) = f(x_k) + \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}(x - x_k)$$

通过解方程 $P_1(x) = 0$，我们可以得到和视角 1 同样的结论。



⇒ 弦截法

弦截法的算法：猜测 x_0 和 x_1，使用公式

$$x_{k+1} := x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1})$$

不断迭代来计算 x_2，x_3，$\cdots$

定理 (弦截法的收敛阶)

在一些条件下【详情见课本】，弦截法以阶数 $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$ 收敛。

注 1：该结论不要求证明，仅仅了解即可。
注 2：抛物线法的设计是类似的（不要求），可自行研究一下。

目录

总结

- 牛顿法是什么和牛顿法的收敛阶
- 可以对于具体问题应用牛顿法
- 了解牛顿法的优势和局限

	普通迭代法	牛顿法
使用资源	f	f 和 f'
若 x_0 足够接近 x^*，能否保证收敛?	不能	可以（但需要一些不是很严格的条件）
收敛速度	一阶	二阶
数值验证时看什么?	$\log(1/e_N)$ vs N	$\log\log(1/e_N)$ vs N
局限	局部收敛条件相比而言更严格，收敛阶低	当 $f'(x^*)$ 不存在（或等于 0），收敛无法保证（或变慢）

弦截法的内容较少，请直接参见第 5 小节的内容即可。