第三章 线性方程

第（4）部分：迭代法

目录

问题来源

若 $\boldsymbol{A}$ 为低阶稠密矩阵，高斯消元法很有优势

若 $\boldsymbol{A}$ 为高阶稀疏矩阵，比如 $(n \geqslant 10^4)$，内存问题出现

想法： 通过迭代法，避免直接存储 $\boldsymbol{A}$。

例子：

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 如果我们把它当成稠密矩阵做高斯消元，我们需要 25 个元素
- 事实上仅需存储 5 个元素；该过程不会影响到计算矩阵和向量的乘法

注：在本门课中，我们不涉及如何设计数据结构来存储稀疏矩阵。

核心目标

把 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 等价改写成 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}$。

问题：如何找到合适的 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{f}$

假设我们已经找到了，我们可以设计迭代算法：$\boxed{\boldsymbol{x}^{(n+1)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(n)} + \boldsymbol{f}}$

若 $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}^{(n)}$ 存在，则该方法收敛，否则称为发散。

我们需要解决的问题是：

- 如何找到合适的 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{f}$
- 如何分析对应方法的收敛性

迭代法回顾

我们总体目标是把 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 等价改写成 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}$。对于这样的迭代法，误差 $\varepsilon^{(k)} \overset{\text{定义}}{=} \boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^*$ 是如何累计的呢?

$$\varepsilon^{(k+1)} = \boxed{?} \; \varepsilon^{(k)}$$

误差累计的关系是:

$$\varepsilon^{(k+1)} = \boldsymbol{B}\ \varepsilon^{(k)}$$

- 对于一维问题：$\lim_{k\to\infty} \varepsilon^{(k)} = 0$ 的充要条件是 $|\boldsymbol{B}|$ ________ 1?
- 对于一般维数的情况，我们希望 “$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{B}^k = \mathbf{0}$”
  如果我们使用范数的语言，即我们希望量化下面方程成立的条件:

$$\lim_{k\to\infty} \left\|\boldsymbol{B}^k\right\| = 0$$

练习：根据第二章讲义里介绍的迭代法收敛阶数的定义，对于线性方程组的上述迭代法的阶数是什么？以及为什么？

误差累计的关系是：

$$\varepsilon^{(k+1)} = \boldsymbol{B}\,\varepsilon^{(k)}$$

- 对于一维问题：$\lim_{k\to\infty}\varepsilon^{(k)} = 0$ 的充要条件是 $|\boldsymbol{B}|$ ________ 1?
- 对于一般维数的情况，我们希望 "$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{B}^k = \mathbf{0}$"
  如果我们使用范数的语言，即我们希望量化下面方程成立的条件：

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\boldsymbol{B}^k\right\| = 0$$

练习：根据第二章讲义里介绍的迭代法收敛阶数的定义，对于线性方程组的上述迭代法的阶数是什么？以及为什么？

答案：因误差 $\varepsilon^{(k)}$ 上的指数是 1，故而是一阶迭代算法。

目录

例子

考虑

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 2 \\ 4 & 11 & -1 \\ 6 & 3 & 12 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 20 \\ 33 \\ 36 \end{pmatrix}$$

其精确解为 $\boldsymbol{x}^* = (3,2,1)^{\mathrm{T}}$。我们把它改写成

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{8}(3x_2 - 2x_3 + 20) \\ x_2 &= \frac{1}{11}(-4x_1 + x_3 + 33) \\ x_3 &= \frac{1}{12}(-6x_1 - 3x_2 + 36) \end{aligned}$$

该方程具有结构 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}_0\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}$。

问题：请写出 $\boldsymbol{B}_0$ 的具体表达式。

一般情况：矩阵的语言

假设 $a_{ii} \neq 0$

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \boldsymbol{L} = -\begin{pmatrix} 0 & & & \\ a_{21} & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{U} = -\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & 0 & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \Longrightarrow (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{L} - \boldsymbol{U})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Longrightarrow \boldsymbol{Dx} = (\boldsymbol{L} + \boldsymbol{U})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{x} = \underbrace{\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{U})}_{\boldsymbol{B}_0}\boldsymbol{x} + \underbrace{\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b}}_{\boldsymbol{f}}$$

其中 $\boldsymbol{B}_0 = \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{U}) = \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{A}) = \boxed{\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}}$.

一般情况：具体元素

把 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 改写成

$$x_i=\frac{1}{a_{ii}}\left(b_i-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}a_{ij}x_j\right)\quad (i=1,2,\cdots,n),$$

因此，迭代法的另一种形式为

$$\begin{cases} x^{(0)}=\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)}\right)^{\mathrm{T}} & (\text{初始向量}),\\ x_i^{(k+1)}=\dfrac{1}{a_{ii}}\left(b_i-\displaystyle\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}\right), \end{cases}$$

Jacobi 迭代法的总结

- 仅需矩阵和向量的乘法（对稀疏矩阵友好）
- 需存储 $\boldsymbol{x}^{(k)}$ 和 $\boldsymbol{x}^{(k+1)}$

目录

Jacobi 迭代法:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}\right)^{\mathrm{T}} \\ x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \end{cases},$$

因 $x_i^{(k+1)}$ 取决于 $\boldsymbol{x}^{(k)}$ 的几乎所有值，在算完 $\boldsymbol{x}^{(k+1)}$ 前我们需要保留 $\boldsymbol{x}^{(k)}$

问题：在计算 i 元素时，之前计算出来的 $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \cdots, x_{i-1}^{(k+1)}$ 貌似比之前向量的元素 $\boldsymbol{x}^{(k)}$ 更精确，因此能否使用起来呢?

$$\text{Jacobi} \qquad x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$

由于我们依次计算 $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \cdots$ 在计算第 i 个值的时候，也许可以

$$\text{把} \qquad \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} \qquad \text{替换成} \qquad \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)}$$

我们得到 GS 迭代法：对于第 k 次迭代过程，

$$\text{GS:} \qquad \boxed{x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right) \qquad i = 1, 2, \cdots, n}$$

$$\text{GS:} \qquad x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right) \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

我们来把该过程写成矩阵的形式

$$\left(\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}^{(k+1)}\right)_i = b_i + \left(\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^{(k+1)}\right)_i + \left(\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}^{(k)}\right)_i$$
$$\Longrightarrow \boldsymbol{D}\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^{(k+1)} + \boldsymbol{U}\boldsymbol{x}^{(k)}$$

即

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \underbrace{\left(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{L}\right)^{-1}\boldsymbol{U}}_{=:\boldsymbol{B}}\boldsymbol{x}^{(k)} + \underbrace{\left(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{L}\right)^{-1}\boldsymbol{b}}_{\boldsymbol{f}}$$

GS 迭代法的总结

- 仅需矩阵和向量的乘法（对稀疏矩阵友好）
- 仅需存储一个向量 $\boldsymbol{x}^{(k)}$，计算 $\boldsymbol{x}^{(k+1)}$ 时可以在原向量的内存中直接覆盖

例子：

$$\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 20, \\ 4x_1 + 11x_2 - x_3 = 33, \\ 6x_1 + 3x_2 + 12x_3 = 36, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1^{(k+1)} = \left(20 + 3x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)}\right)/8, \\ x_2^{(k+1)} = \left(33 - 4x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}\right)/11, \\ x_3^{(k+1)} = \left(36 - 6x_1^{(k+1)} - 3x_2^{(k+1)}\right)/12. \end{cases}$$

算完 $x_1^{(k+1)}$ 可存在 $x_1^{(k)}$ 同一位置因为 $x_1^{(k)}$ 没出现在后续的计算中。
算完 $x_2^{(k+1)}$ 可存在 $x_2^{(k)}$ 同一位置因为 $x_2^{(k)}$ 没出现在后续的计算 $x_3^{(k+1)}$ 中。

对比数值实验

- 在一定情况下，GS 迭代法比 Jacobi 迭代法收敛快（见代码部分）
- 但存在一些例子，GS 迭代法是发散的，但 Jacobi 迭代法可以收敛（请参考课本例题 8.3 或者代码部分）

目录

定理

设有矩阵序列 $\boldsymbol{A}_k = \left(a_{ij}^{(k)}\right)_{n\times n}$ $(k = 1, 2, \cdots)$ 及 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$。如下的两个说法是等价的:

(i) 对于任意的 $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$，我们有 $\lim_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}$;

(ii) $\lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{A}_k - \boldsymbol{A}\| = 0$。

若上述任何一个条件成立，则称 $\{\boldsymbol{A}_k\}$ 收敛于 $\boldsymbol{A}$, 记作 $\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{A}_k = \boldsymbol{A}$。

收敛性 (1)：直觉部分

假设矩阵 $\boldsymbol{B}$ 具有特征值分解 $\boldsymbol{B}u_i = \lambda_i \boldsymbol{u}_i$, $1 \leq i \leq n$

标记初始误差为 $\varepsilon^{(0)} = \sum_i a_i \boldsymbol{u}_i$

请计算

$$\varepsilon^{(k)} = \sum_i a_i \; ?? \; \boldsymbol{u}_i$$

你能观察到误差 $\varepsilon^{(k)} \to 0$ 的条件是什么?

若谱半径 $\rho(\boldsymbol{B}) < 1$，则 $|\lambda_i| < 1 \quad \forall i$，进而

$$\left\|\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i^k \boldsymbol{u}_i\right\| \le \left[\sum_{i=1}^{n} \|a_i \boldsymbol{u}_i\|\right] \rho(\boldsymbol{B})^k \to 0 \text{ 当} k \to \infty$$

反之，若谱半径 $\rho(\boldsymbol{B}) \ge 1$，则存在某个 i 使得 $|\lambda_i| \ge 1$，进而若初始误差 $\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}$ 很不凑巧恰好是 $\boldsymbol{u}_i$ 时，

$$\left\|\boldsymbol{B}^k \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}\right\| = \left\|\lambda_i^k \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}\right\| \text{ 无法收敛到 0.}$$

定理 (定理 8.2)

设 $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵, 则 $\boldsymbol{B}^k \to \boldsymbol{O}(k \to \infty)$ 的充要条件是 $\rho(\boldsymbol{B}) < 1$.

收敛性 (2)：总结

定理 (定理 8.3 迭代法基本定理)

设有方程组 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}$，对于任意初始向量 $\boldsymbol{x}^{(0)}$ 及任意 $\boldsymbol{f}$, 解此方程组的迭代法 (即 $\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{f}$) 收敛的充要条件是 $\rho(\boldsymbol{B}) < 1$。

若谱半径 $\rho(\boldsymbol{B}) < 1$

$$\text{误差} = \left\|\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}\right\| \leqslant C\rho(\boldsymbol{B})^k$$
$$= Ce^{k \ln \rho(\boldsymbol{B})} = Ce^{-k\left(\ln \frac{1}{\rho(\boldsymbol{B})}\right)}$$

因而，误差呈现指数递减，且收敛速率为 $\ln \frac{1}{\rho(\boldsymbol{B})}$。

收敛性 (3)：谱半径条件 $\Longrightarrow$ 使用矩阵范数替代

那么接下来的问题是 $\rho(\boldsymbol{B})$ 不一定好算，可以用 $\|\boldsymbol{B}\|$ 来代替吗?

回顾：对于任何意义的范数，我们皆有 $\rho(\boldsymbol{B}) \leq \|\boldsymbol{B}\|$，而一般来说 $\|\boldsymbol{B}\|_1$ 和 $\|\boldsymbol{B}\|_\infty$ 比较好算

备注：

- $\|\boldsymbol{B}\| < 1$ 为 $\rho(\boldsymbol{B}) < 1$ 的充分条件，但不是必要条件
- 若 $\|\boldsymbol{B}\|_\infty = 1.1$ 并不一定代表 $\rho(\boldsymbol{B}) > 1$；参见课本例题 8.8

例题

对于前面的例题，Jacobi 迭代时矩阵 $\boldsymbol{B}_0$ 的具体形式为

$$\boldsymbol{B}_0 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{8} & -\frac{2}{8} \\ -\frac{4}{11} & 0 & \frac{1}{11} \\ -\frac{6}{12} & -\frac{3}{12} & 0 \end{pmatrix}$$

问题：请计算 $\|\boldsymbol{B}_0\|_\infty$，并判断 Jacobi 迭代法是否收敛。

例题

对于前面的例题，Jacobi 迭代时矩阵 $\boldsymbol{B}_0$ 的具体形式为

$$\boldsymbol{B}_0 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{8} & -\frac{2}{8} \\ -\frac{4}{11} & 0 & \frac{1}{11} \\ -\frac{6}{12} & -\frac{3}{12} & 0 \end{pmatrix}$$

问题： 请计算 $\|\boldsymbol{B}_0\|_\infty$，并判断 Jacobi 迭代法是否收敛。

答案： $\|\boldsymbol{B}\|_\infty = \max\left\{\frac{5}{8}, \frac{5}{11}, \frac{9}{12}\right\} < 1$，因而 $\rho(\boldsymbol{B}) \le \|\boldsymbol{B}\|_\infty < 1$，进而可知迭代法收敛。

定理 (定理 8.4 迭代法收敛的充分条件)

如果方程组的迭代公式为 $\boldsymbol{x}^{(k+1)}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k)}+\boldsymbol{f}$，且迭代矩阵的某一范数 $\|\boldsymbol{B}\|_{\nu}=q<1$，则

1° 迭代法收敛;

2° $\left\|\boldsymbol{x}^{*}-\boldsymbol{x}^{(k)}\right\|_{\nu}\leqslant\frac{q}{1-q}\left\|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^{(k-1)}\right\|_{\nu}$

3° $\left\|\boldsymbol{x}^{*}-\boldsymbol{x}^{(k)}\right\|_{\nu}\leqslant\frac{q^{k}}{1-q}\left\|\boldsymbol{x}^{(1)}-\boldsymbol{x}^{(0)}\right\|_{\nu}$

请对比参考第二章，第一部分（方程求根）讲义里的第 16 页的定理。

收敛性 (4)：对角占优矩阵

定义 (定义 8.4 对角占优阵)

设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$,

1° 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足条件

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

即 $\boldsymbol{A}$ 的每一行对角元素的绝对值都严格大于同行其他元素绝对值之和，则称 $\boldsymbol{A}$ 为严格对角占优阵。

2° 如果 $|a_{ii}| \geqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \, (i = 1, 2, \cdots, n)$ 且至少有一个不等式严格成立, 称 $\boldsymbol{A}$ 为弱对角占优阵。

定理

若 $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为严格对角占优矩阵，则

- $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵；
- *Jacobi* 迭代法，*GS* 迭代法均收敛。

注：对于不可约弱对角占优矩阵，这个结论也成立；参见课本定理 8.6 和定理 8.7。

目录

GS 迭代法 $$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right) \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

假设已算完 $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \cdots, x_{i-1}^{(k+1)}$，我们想算 $x_i^{(k+1)}$，定义辅助变量

$$\tilde{x}_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right) \qquad i = 1, 2, \cdots, n \tag{1}$$

并且取

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} + \omega\tilde{x}_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega\left(\tilde{x}_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right)$$

代入(1)后我们得到 SOR 算法

$$\boxed{x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)}$$

逐次超松弛迭代法(successive over relaxation method，简称 SOR 方法)

参数 ω 被称为松弛因子：

- 当 $\omega < 1$，低松弛法
- 当 $\omega = 1$，退化成 GS 迭代法
- 当 $\omega > 1$，超松弛法

矩阵形式

我们可以将 SOR 算法的表达式

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{\color{red}{j=i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

改写成如下的矩阵形式

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} + \omega \boldsymbol{D}^{-1} \left(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^{(k+1)} + (\boldsymbol{U} - \boldsymbol{D})\boldsymbol{x}^{(k)} \right)$$

通过合并同类项，可得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^{(k+1)} &= (\boldsymbol{I} - \omega \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{L})^{-1} \left(\boldsymbol{I} + \omega \boldsymbol{D}^{-1} (\boldsymbol{U} - \boldsymbol{D}) \right) \boldsymbol{x}^{(k)} + (\boldsymbol{I} - \omega \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{L})^{-1} \omega \boldsymbol{D}^{-1} \boldsymbol{b} \\ &= \underbrace{(\boldsymbol{D} - \omega \boldsymbol{L})^{-1} \left((1-\omega)\boldsymbol{D} + \omega \boldsymbol{U} \right)}_{\boldsymbol{B}_\omega} \boldsymbol{x}^{(k)} + \underbrace{\omega (\boldsymbol{D} - \omega \boldsymbol{L})^{-1} \boldsymbol{b}}_{\boldsymbol{f}_\omega} \end{aligned}$$

定理

若 *SOR* 算法收敛则 $0 < \omega < 2$。

证明.

首先验证 $|\det(\boldsymbol{B}_\omega)| = |(1-\omega)^n|$ 以及 $|\det(\boldsymbol{B}_\omega)| \leq \left(\rho(\boldsymbol{B}_\omega)\right)^n$，而收敛性已经假设了 $\rho(\boldsymbol{B}_\omega) < 1$，进而 $\omega \in (0, 2)$。 $\square$

定理

若 $\boldsymbol{A}$ 为对称正定矩阵, 且 $0 < \omega < 2$，则 *SOR* 算法收敛。[1]

定理 (最佳的 ω)

最优的 ω 取决于 $\boldsymbol{B}_0$ 的谱半径，$\omega_{opt} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho^2(\boldsymbol{B}_0)}}$。[2]

[1] 证明可参考课本

[2] 了解结果即可

目录

主要知识点

- 迭代法很适合求解涉及高阶稀疏矩阵的线性方程组
  核心是找到 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{f}$
- 掌握 Jacobi 迭代法的来源、以及能使用两种语言（矩阵和元素）来描述
- 掌握 Gauss-Seidel 迭代法，以及和 Jacobi 迭代法的区别
- 收敛性取决于谱半径 $\rho(\boldsymbol{B})$（即课本里的定理 8.3）
- 掌握超松弛迭代法的设计原理、表达式，以及其和 GS 迭代法的关系
- 了解超松弛迭代法的部分性质，比如 ω 的选择和收敛性的关系