第三章 线性方程

第（2）部分：LU 分解

目录

我们的目标是解方程 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$。高斯消元法能帮助我们同时 (1) 解方程；(2) 提供 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LU}$ 分解。其中实际上资源消耗最主要的部分是在 LU 分解。

若我们把 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LU}$ 作为初始点，计算 $\boldsymbol{LUx} = \boldsymbol{b}$ 可以改写成

$$\boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{Ux} = \boldsymbol{y}$$

对于任意的 n 阶、具有 LU 分解的矩阵 $\boldsymbol{A}$，在假设 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{U}$ 已知的情况下，仅仅计算 $\boldsymbol{y}$ 和计算 $\boldsymbol{x}$ 的资源消耗是：

(A) $\mathcal{O}(n)$
(B) $\mathcal{O}(n^2)$
(C) $\mathcal{O}(n^3)$

我们的目标是解方程 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$。高斯消元法能帮助我们同时 (1) 解方程；(2) 提供 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LU}$ 分解。其中实际上资源消耗最主要的部分是在 LU 分解。

若我们把 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LU}$ 作为初始点，计算 $\boldsymbol{LUx} = \boldsymbol{b}$ 可以改写成

$$\boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{Ux} = \boldsymbol{y}$$

对于任意的 n 阶、具有 LU 分解的矩阵 $\boldsymbol{A}$，在假设 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{U}$ 已知的情况下，仅仅计算 $\boldsymbol{y}$ 和计算 $\boldsymbol{x}$ 的资源消耗是：

(A) $\mathcal{O}(n)$
(B) $\mathcal{O}(n^2)$
(C) $\mathcal{O}(n^3)$

答案：*B*

我们已经介绍了如何对于 $\boldsymbol{Ux} = \boldsymbol{y}$ 求解，类似的思想可以帮助我们写出 $\boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{b}$ 如何求解；可参见课本的公式 (7.4.4) 和 (7.4.5)。

所以，核心的问题在于如何得到这样 LU 分解；以及对于特殊的矩阵，我们是否具有加速的算法。

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ l_{n1} & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{pmatrix}.$$

目标

了解 4 种 LU 分解法

- 直接的三角分解法 (Doolittle 分解法)
- LDL 分解法
- 平方根法
- 追赶法

明白它们的适用范围和计算复杂度

目录

直接的三角分解法 (Doolittle 分解法)

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LU} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ l_{n1} & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline \boldsymbol{c} & \boldsymbol{L}_2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} u_{11} & \boldsymbol{d}^T \\ \hline & \boldsymbol{U}_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} u_{11} & \boldsymbol{d}^T \\ \hline u_{11}\boldsymbol{c} & \boldsymbol{c}\boldsymbol{d}^T + \boldsymbol{L}_2\boldsymbol{U}_2 \end{array}\right]$$

通过对比元素，我们可知 $u_{11} = a_{11}$, $\boldsymbol{d}^T = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$，并且 $c^T = \frac{1}{u_{11}} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{n1} \end{bmatrix}$。

由于我们已经知道 $\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{d}$，因而

$$\boldsymbol{L}_2 \boldsymbol{U}_2 = \begin{pmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} - \boldsymbol{c}\boldsymbol{d}^T$$

该计算中分别需要_____ 次乘法和减法。

通过对比元素，我们可知 $u_{11} = a_{11}$, $\boldsymbol{d}^T = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$，并且 $c^T = \frac{1}{u_{11}} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{n1} \end{bmatrix}$。

由于我们已经知道 $\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{d}$，因而

$$\boldsymbol{L}_2 \boldsymbol{U}_2 = \begin{pmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} - \boldsymbol{c}\boldsymbol{d}^T$$

该计算中分别需要 $(n-1)^2$ 次乘法和减法。

对于进一步的得到 $\boldsymbol{L}_2$ 和 $\boldsymbol{U}_2$ 的过程，我们继续重复上述的步骤。

例子

请计算如下矩阵的 LU 分解：

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

例子

请计算如下矩阵的 LU 分解：

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

答案：$\begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & 1 & -4 \\ & & -24 \end{bmatrix}$

在用计算机计算时，由于计算好u_{ri}后a_{ri}就不用了，因此计算好L,U的元素后就存放在A的相应位置. 例如

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ l_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ l_{31} & l_{32} & u_{33} & u_{34} \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & u_{44} \end{pmatrix}.$$

最后在存放A的数组中得到L,U的元素.

该方法使用的乘除法次数是 $\sum_{i=2}^{n} i(i-1) \approx \frac{n^3}{3} = \mathcal{O}(n^3)$。

和高斯消元法是一样的；此处介绍了一个巧妙地能节约计算机内存的方法。

算法

上述的方法可以等价改写成如下的算法：

Algorithm 1: LU decomposition

$u_{1i} = a_{1i},\ (i = 1, 2, \cdots, n)$

$l_{i1} = a_{i1}/u_{11}\ (i = 2, 3, \cdots, n)$

for $r \leftarrow 2$ *to* n **do**

  $u_{ri} = a_{ri} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk} u_{ki}\ (i = r, r+1, \cdots, n)$

  $l_{ir} = (a_{ir} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{ik} u_{kr})/u_{rr}\ (i = r+1, \cdots, n,\ r \neq n)$

end

（大家可以根据自己偏好选择不同视角理解 Doolittle 分解法）

目录

LDL 法

假设 $\boldsymbol{A}$ 具有对称性，我们能否利用对称性来设计加速算法。

定理 (对称矩阵的三角分解定理)

假设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 的所有顺序主子式均不等于 0（其实目的就是保证存在 LU 分解），则 $\boldsymbol{A}$ 可以唯一分解为

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{D}\boldsymbol{L}^T$$

其中 $\boldsymbol{L}$ 是单位下三角矩阵，$\boldsymbol{D}$ 是对角矩阵。

（证明请见课内板书或课本）

问题变成了如何找到 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 使得

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ l_{21} & 1 & & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & d_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_{21} & l_{31} & \cdots & l_{n1} \\ & 1 & l_{32} & \cdots & l_{n2} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & l_{n,n-1} \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

问题：我们可以怎么做?

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ l_{21} & 1 & & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & d_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_{21} & l_{31} & \cdots & l_{n1} \\ & 1 & l_{32} & \cdots & l_{n2} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & l_{n,n-1} \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ l_{n1} & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & d_1 l_{21} & \cdots & d_1 l_{n1} \\ & d_2 & \cdots & d_2 l_{n2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & d_n \end{pmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{c|ccc} d_1 & d_1 l_{21} & \cdots & d_1 l_{n1} \\ \hline d_1 l_{21} & & & \\ \vdots & \multicolumn{3}{c}{\boldsymbol{L}_2 \boldsymbol{U}_2 + d_1 \begin{bmatrix} l_{21} \\ \vdots \\ l_{n1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{21} & \cdots & l_{n1} \end{bmatrix}} \\ d_1 l_{n1} & & & \end{array}\right]$$

通过对照，我们需要

$$
\begin{aligned}
d_1 &= a_{11} \\
l_{i1} &= \frac{a_{i1}}{d_1} \qquad i = 2, \cdots, n
\end{aligned}
$$

下一步计算

$$
\boldsymbol{L}_2\boldsymbol{U}_2 = \begin{pmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} - d_1 \begin{bmatrix} l_{21} \\ \vdots \\ l_{n1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{21} & \cdots & l_{n1} \end{bmatrix}
$$

我们通过类似直接三角分解法，可以改写出课本公式 (7.4.9)。

我们来考虑一下乘除法运算的次数（对于至此为止的第一层的计算）。

对于至此为止的第一层的计算，乘除法运算次数为

$$\underbrace{(n-1)}_{\text{第一列}}+\underbrace{\frac{(n-1)^2-(n-1)}{2}+(n-1)}_{\boldsymbol{L}_2\boldsymbol{U}_2\text{这一分块矩阵}}\approx\frac{n^2}{2}$$

因而，总的计算量大约为 $\frac{n^3}{6}$，是高斯消元法的一半。

问题：此处消耗只有一半的来源是什么？

目录

平方根法

平方根法主要是针对（半）正定矩阵。

定义：假设 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵，

- 对于任意的向量 $\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} \geq 0$，则我们称该矩阵是半正定矩阵。
- 对于任意的非零向量 $\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} > 0$，则我们称该矩阵是正定矩阵。

结论：

(1) 若我们取 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_i$，则我们可以得到 $\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = a_{ii} \geq 0$。

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 是半正定矩阵，且 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{D}\boldsymbol{L}^T$，则我们可知对角矩阵 $\boldsymbol{D}$ 的元素皆为非负。

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{d_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{d_n} \end{pmatrix} = \boldsymbol{D}^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{D}^{\frac{1}{2}}$$

因而，

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{D}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{D}^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{D}^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}} = \left(\boldsymbol{L}\boldsymbol{D}^{\frac{1}{2}}\right) \left(\boldsymbol{L}\boldsymbol{D}^{\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{L}_1 \boldsymbol{L}_1^{\mathrm{T}}$$

其中 $\boldsymbol{L}_1 = \boldsymbol{L}\boldsymbol{D}^{\frac{1}{2}}$ 是下三角矩阵。

定理 (Cholesky 分解)

如果 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶对称正定矩阵，则存在一个实的非奇异下三角阵 $\boldsymbol{L}$ 使 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}$，当限定 $\boldsymbol{L}$ 的对角元素为正时，这种分解是唯一的。

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^T = \begin{pmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ l_{n1} & \cdots & l_{n,n-1} & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & \cdots & l_{n1} \\ & l_{22} & \cdots & l_{n2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & l_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} l_{11} & \\ \hline \boldsymbol{c} & \boldsymbol{L}_2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} l_{11} & \boldsymbol{c}^T \\ \hline & \boldsymbol{L}_2^T \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} l_{11}^2 & l_{11}\boldsymbol{c}^T \\ \hline l_{11}\boldsymbol{c} & \boldsymbol{c}\boldsymbol{c}^T + \boldsymbol{L}_2\boldsymbol{L}_2^T \end{array}\right]$$

因此，$l_{11} = \sqrt{a_{11}}$，$l_{j1} = \frac{a_{j1}}{\sqrt{a_{11}}}$ $j = 2, 3, \cdots, n$。剩余部分的更新实际上和前面没有区别；因此此处略去。

该分解需要计算根号，除此之外，其所需的乘除法运算次数和 LDL 方法基本相同。

定理

对于任意的 $k \leq j$，我们可知

$$l_{jk}^2 \leq a_{jj} \leq \max_{1 \leq j \leq n} a_{jj}$$

因而该分解产生的下三角矩阵的任何元素的平方都不超过 $\max_{1 \leq j \leq n}\{a_{jj}\}$。

证明.

我们仅需验证通过对比 $a_{jj} = \sum_{k=1}^{j} l_{jk}^2$。 □

含义：该结论是说明对于 Cholesky 分解，分解得到的下三角矩阵的元素的数量级不会增加。

目录

在大量的实际问题中，有些矩阵 $\boldsymbol{A}$ 实际上更特殊，是三对角矩阵。例如三次样条的计算（后面章节会介绍），以及偏微分方程的数值解（其它课程会介绍），等等。

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & a_i & b_i & c_i & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & & a_n & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix} \qquad (\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{f})$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 满足对角占优条件：

(1) $|b_1| > |c_1| > 0$;

(2) $|b_i| \geqslant |a_i| + |c_i|, \quad a_i, c_i \neq 0 \ (i = 2, 3, \cdots, n-1)$;

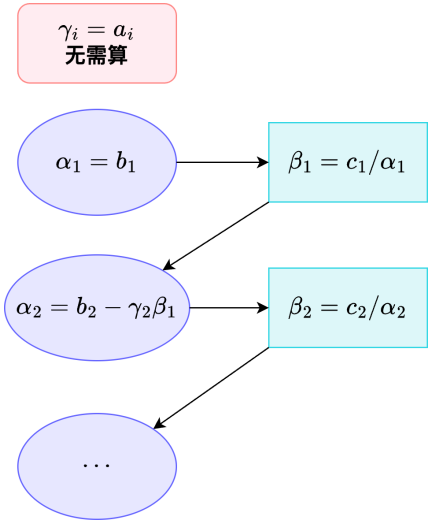
(3) $|b_n| > |a_n| > 0$.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= \begin{pmatrix}
b_1 & c_1 & & & \\
a_2 & b_2 & c_2 & & \\
& \ddots & \ddots & \ddots & \\
& & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\
& & & a_n & b_n
\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}
\alpha_1 & & & & \\
\gamma_2 & \alpha_2 & & & \\
& \gamma_3 & \alpha_3 & & \\
& & \ddots & \ddots & \\
& & & \gamma_n & \alpha_n
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & \beta_1 & & & \\
& 1 & \beta_2 & & \\
& & \ddots & \ddots & \\
& & & 1 & \beta_{n-1} \\
& & & & 1
\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}
\alpha_1 & \alpha_1\beta_1 & & & \\
\gamma_2 & \gamma_2\beta_1 + \alpha_2 & \alpha_2\beta_2 & & \\
& \gamma_3 & \gamma_3\beta_2 + \alpha_3 & \alpha_3\beta_3 & \\
& & \ddots & \ddots & \ddots \\
& & & \ddots & \ddots
\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

所有的 $\gamma_2, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$ 可以直接得到。然后计算顺序是 $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \cdots$。

总结一下求解 LU 分解中待定系数的顺序

- 直接写答案：$\gamma_i = a_i$，$i = 2, \cdots, n$
- 第一行的结果：$\alpha_1 = b_1$，$\beta_1 = \dfrac{c_1}{\alpha_1}$
- 后面行的结果：for $i = 2, 3 \cdots, n-1$，令
  $\alpha_i = b_i - \gamma_i \beta_{i-1}$
  $\beta_i = c_i / \alpha_i$
- 最后一行的结果：
  $\alpha_n = b_n - \gamma_n \beta_{n-1}$



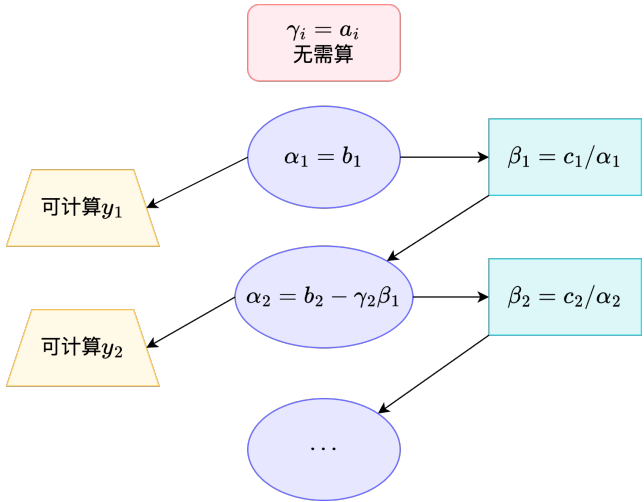
最终解方程 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{f}$ 的过程变成了

$$\boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{f}$$
$$\boldsymbol{Ux} = \boldsymbol{y}$$

我们先来看 $\boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{f}$,

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & \\ \gamma_2 & \alpha_2 & & & \\ & \gamma_3 & \alpha_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \gamma_n & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

追的过程


$\gamma_i = a_i$
无需算
$\alpha_1 = b_1$
$\beta_1 = c_1/\alpha_1$
可计算y_1
$\alpha_2 = b_2 - \gamma_2\beta_1$
$\beta_2 = c_2/\alpha_2$
可计算y_2
$\cdots$

赶的过程

对于解 $\boldsymbol{Ux} = \boldsymbol{y}$,

$$\begin{pmatrix} 1 & \beta_1 & & & \\ & 1 & \beta_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \beta_{n-1} \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_n &= y_n \\ x_{n-1} &= -\beta_{n-1} x_n + y_{n-1} \\ x_{n-2} &= -\beta_{n-2} x_{n-1} + y_{n-2} \\ &\vdots \end{aligned}$$

练习：对于追赶法的计算量是多少?

(A) $\mathcal{O}(n)$
(B) $\mathcal{O}(n^2)$
(C) $\mathcal{O}(n^3)$

(答案可见最后一页的总结。)

定理 (定理 7.9)

设有三对角方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{f}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 满足对角占优条件，则 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵且由追赶法计算公式中 $\{\alpha_i\}, \{\beta_i\}$ 满足：

$$
\begin{aligned}
&1^\circ \quad 0 < |\beta_i| < 1 \quad (i = 1, 2, \cdots, n-1) \\
&2^\circ \quad 0 < |c_i| \leqslant |b_i| - |a_i| < |\alpha_i| < |b_i| + |a_i| \quad (i = 2, 3, \cdots, n-1) \\
&\qquad\ 0 < |b_n| - |a_n| < |\alpha_n| < |b_n| + |a_n|
\end{aligned}
$$

目录

我们假设矩阵 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LU}$ 存在 LU 分解。

方法	公式	乘除法次数	额外假设
直接三角分解法	$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LU}$	约 $\frac{n^3}{3}$	无
LDL	$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LDL}^T$	约 $\frac{n^3}{6}$	$\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵
平方根法（Cholesky 分解）	$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LL}^T$	约 $\frac{n^3}{6}$	$\boldsymbol{A}$ 是正定
追赶法	$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LU}$	$\mathcal{O}(n)$	$\boldsymbol{A}$ 是对角占优 $\boldsymbol{A}$ 为三对角矩阵