# 第 2 章：数学基础

## (5)：线性代数补充

曹语

课程主页：https://yucaoyc.github.io/math3806

# Null and Range

- 对于一个矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times p}$，我们定义

$$
\begin{array}{lll}
\text{零空间（核）} & \mathrm{Null}(\boldsymbol{A}) & := \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^p : \ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}_n \right\} \\
\text{值域} & \mathrm{Range}(\boldsymbol{A}) & := \left\{ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n : \ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \text{ for some } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^p \right\}
\end{array}
$$

  上述的 $\mathrm{Null}(\boldsymbol{A})$ 和 $\mathrm{Range}(\boldsymbol{A})$ 都是子空间。

- $\dim \mathrm{Range}(\boldsymbol{A})$ 被定义为 $\mathrm{Rank}(\boldsymbol{A})$。

若 $S, T \subset \mathbb{R}^n$ 是某个子空间：

- 若对于任意的 $\boldsymbol{x} \in S$, $\boldsymbol{y} \in T$，我们都有 $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 0$，则我们说这两个子空间正交/垂直。
- $S$ 的正交补 (orthogonal complement)被定义为

$$S^{\perp} = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \ \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 0, \quad \forall \boldsymbol{y} \in S\right\}$$

  例如 $S = \mathrm{span}\{\boldsymbol{e}_1\} \subset \mathbb{R}^3$ 的正交补是 $\mathrm{span}\{\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$

- $\dim(S) + \dim(S^{\perp}) = n$
- $(S^{\perp})^{\perp} = S$

## 定理

对于矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times p}$， $Null(\boldsymbol{A}) = Range(\boldsymbol{A}^\top)^\perp \subseteq \mathbb{R}^p$

## 证明.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x} \in \mathrm{Null}(\boldsymbol{A}) \quad &\leftrightarrow \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}_n \quad \leftrightarrow \quad \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A}^\top = \mathbf{0}_n^\top \\
&\leftrightarrow \quad \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{y} = 0, \ \forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \quad \leftrightarrow \quad \boldsymbol{x} \in \mathrm{Range}(\boldsymbol{A}^\top)^\perp
\end{aligned}
$$

$\square$

# 第 2 章 - 部分 4 - 例子 1（补充证明；了解即可）

**设定**：假设 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}\boldsymbol{Q}^{-1}$，其中 $\boldsymbol{P}$ 是半正定矩阵；$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{bmatrix}$ 的每一列是 $\boldsymbol{P}$ 的规范化的特征向量，对角矩阵 $D_{i,i}$ 是对应的特征值。我们假设 $D_{i,i} = 0$ 对于任意的 $1 \le i \le \alpha$。

- 之前的结论是：$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{q}$ 的前 $\alpha$ 个分量都是 $0$，则优化问题有无穷多个解；

  $\leftrightarrow$ $\boldsymbol{v}_i^\top \boldsymbol{q} = 0$，对于任意的 $1 \le i \le \alpha$

- 接下来的目标：说明上述的情况等价于 $\boldsymbol{q} \in \mathrm{Range}(\boldsymbol{P})$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Range}(\boldsymbol{P}) &= \left\{\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{x} : \ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\right\} = \left\{\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}\boldsymbol{y} : \ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n\right\} \\
&= \left\{\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{v}_i D_{ii} y_i : \ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n\right\} = \left\{\sum_{i>\alpha} \boldsymbol{v}_i z_i : \ z_i \in \mathbb{R}^n\right\}
\end{aligned}
$$

  由于 $\boldsymbol{q}$ 和前 $\alpha$ 个特征向量垂直，因此它必然属于后面的 $n-\alpha$ 个特征向量的线性组合，因此 $\boldsymbol{q} \in \mathrm{Range}(\boldsymbol{P})$。

## 阅读材料/参考资料

- Stephen Boyd and Sanjay Lall. Range and Null Space. Available at https://ee263.stanford.edu/lectures/rangenull.pdf
- 课本附录 A.5.1