第 5 章：对偶

课堂练习：Lagrange 对偶与最优性条件

授课教师：曹语

课程主页：https://yucaoyc.github.io/math3806

练习结构

本讲义把第 5 章两部分的额外课堂练习放在同一个文件中：

部分	对应内容	主要训练点
第 1 部分	Lagrange 对偶	对偶函数、弱对偶、线性规划对偶
第 2 部分	最优性条件	Slater 条件、KKT 条件

目录

第 1 部分：Lagrange 对偶

本部分练习对应第 5 章第 1 部分。

完成后应能：

- 将优化问题写成标准形式
- 写出 Lagrange 函数，并通过对原变量取下确界得到对偶函数；
- 最大化对偶函数，理解它给出的最优下界。

问题 1：二维二次问题的对偶函数

练习 1： 考虑问题

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2 & \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2. \\ \text{subject to} \quad & x_1 + x_2 = 1, & \end{aligned}$$

1. 写出 Lagrange 函数 $L(\boldsymbol{x}, \nu)$；
2. 计算对偶函数 $g(\nu) = \inf_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x}, \nu)$；
3. 求解对偶问题，并与原问题最优解比较。

问题 2：三维线性规划的对偶

练习 2： 考虑线性规划

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & x_1 + x_3 \\
\text{subject to} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\
& x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0.
\end{aligned}
$$

1. 写成 $\min \ c^\top \boldsymbol{x}$，subject to $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{x} \succeq 0$ 的形式；
2. 将 $\boldsymbol{x} \succeq 0$ 用于定义域处理，写出它的对偶问题。

目录

第 2 部分：最优性条件

本部分练习对应第 5 章第 2 部分。

完成后应能：

- 判断简单凸问题是否满足 Slater 条件；
- 写出完整 KKT 条件，并用它求解最优解。

问题 3

练习 3： 考虑二维凸优化问题

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \frac{1}{2}\left[(x_1-2)^2+(x_2-1)^2\right] \\
\text{subject to} \quad & x_1+x_2 \le 1, \\
& x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0,
\end{aligned}
\qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2.
$$

1. 判断该问题是否满足 Slater 条件；
2. 写出完整 KKT 条件。

问题 4

练习 4： 考虑一维凸优化问题

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & (x-2)^2 \\ \text{subject to} & x \geq 1. \end{array}$$

1. 写成标准形式 $f_1(x) \leq 0$；
2. 写出 Lagrange 函数 $L(x, \lambda)$ 和完整 KKT 条件；
3. 利用互补松弛求 $x^\star$ 和 $\lambda^\star$。

问题 5

练习 5： 考虑

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \\ \text{subject to} & x_1 + x_2 \geq 1, \\ & x_1 - x_2 = 0. \end{array}$$

1. 写成标准形式 $f_1(\boldsymbol{x}) \leq 0$ 并写出 Lagrange 函数；
2. 用 KKT 条件求 $\boldsymbol{x}^\star$ 和乘子 $(\lambda^\star, \nu^\star)$。

目录

参考解答：问题 1

Lagrange 函数为

$$L(\boldsymbol{x},\nu)=\frac{1}{2}x_1^2+x_2^2+\nu(x_1+x_2-1),$$

由于此时 $\boldsymbol{x}$ 不再具有约束，对于计算 g，可以用无约束情况下的最优性条件得到

$$\nabla_{\boldsymbol{x}}L=0\Longrightarrow x_1=-\nu,\quad x_2=-\nu/2,$$
$$g(\nu)=\inf_{\boldsymbol{x}}L(\boldsymbol{x},\nu)=-\frac{3}{4}\nu^2-\nu.$$

因此对偶问题为

$$\max_{\nu\in\mathbb{R}}\ -\frac{3}{4}\nu^2-\nu,\qquad -\frac{3}{2}\nu-1=0\Longrightarrow\nu^\star=-\frac{2}{3},\quad d^\star=\frac{1}{3}.$$

对于原问题，将 $x_2=1-x_1$ 带入，并求解二次函数最优点可得 $\boldsymbol{x}^\star=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$，且 $p^\star=\frac{1}{2}(2/3)^2+(1/3)^2=\frac{1}{3}=d^\star$。

任意 ν 给出 $p^\star$ 的下界 $g(\nu)$；最佳下界是 $\max_\nu g(\nu)$。

参考解答：问题 2（一）写成标准形式

先把原问题中的三个变量和两个等式约束整理成矩阵形式。这里

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

因此原问题可以写为

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^\top \boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = b, \\ & \boldsymbol{x} \succeq 0. \end{array}$$

注意：$\boldsymbol{x} \succeq 0$ 被处理成为了变量的定义域限制，所以后面取 $\inf$ 时仍然在 $\boldsymbol{x} \succeq 0$ 上取。

参考解答：问题 2（二）对偶函数

等式约束对应的乘子 $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^2$ 没有符号限制。

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\nu}) = c^\top \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\nu}^\top (A\boldsymbol{x} - b) = -b^\top \boldsymbol{\nu} + (c + A^\top \boldsymbol{\nu})^\top \boldsymbol{x}.$$

接下来只看最后一项在 $\boldsymbol{x} \succeq 0$ 上的下确界：

$$g(\boldsymbol{\nu}) = -b^\top \boldsymbol{\nu} + \inf_{\boldsymbol{x} \succeq 0} (c + A^\top \boldsymbol{\nu})^\top \boldsymbol{x}.$$

如果 $c + A^\top \boldsymbol{\nu}$ 的某个分量为负，就让对应 $x_j \to +\infty$，则 $L \to -\infty$；如果所有分量都非负，最小值在 $\boldsymbol{x} = 0$ 处取得。因此

$$g(\boldsymbol{\nu}) = \begin{cases} -b^\top \boldsymbol{\nu}, & c + A^\top \boldsymbol{\nu} \succeq \mathbf{0}, \\ -\infty, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

参考解答：问题 2（三）写出对偶

对偶问题就是在让 $g(\boldsymbol{\nu})$ 有限的乘子上，尽量把这个下界做大：

$$\max_{\boldsymbol{\nu}\in\mathbb{R}^2} \ -b^\top \boldsymbol{\nu} \quad \text{s.t.} \quad c + A^\top \boldsymbol{\nu} \succeq \mathbf{0},$$

即

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & -\nu_1 - 2\nu_2 \\ \text{subject to} & 1 + \nu_1 + \nu_2 \geq 0, \\ & \nu_1 + 2\nu_2 \geq 0, \\ & 1 + \nu_1 + 3\nu_2 \geq 0. \end{array}$$

参考解答：问题 3

目标函数是点 (x_1, x_2) 到 $(2,1)$ 的平方距离的一半，约束区域是一个三角形。该问题是凸问题；取严格可行点 $\bar{\boldsymbol{x}} = (1/4, 1/4)$，则

$$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 - 1 < 0, \quad -\bar{x}_1 < 0, \quad -\bar{x}_2 < 0,$$

故 Slater 成立。因此 KKT 条件不仅必要，而且充分。

为了统一写乘子，先把所有不等式写成 "≤ 0"：

$$f_1 = x_1 + x_2 - 1, \quad f_2 = -x_1, \quad f_3 = -x_2,$$

$$L = f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3.$$

KKT 为

$$\begin{aligned}
\text{驻点条件 } \nabla_x L = 0 \to \quad & x_1 - 2 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \quad x_2 - 1 + \lambda_1 - \lambda_3 = 0, \\
\text{对偶可行 + 原始可行} \quad & x_1 + x_2 \leq 1,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \quad \lambda_i \geq 0, \\
\text{互补松弛} \quad & \lambda_1(x_1 + x_2 - 1) = 0, \quad \lambda_2 x_1 = 0, \quad \lambda_3 x_2 = 0.
\end{aligned}$$

参考解答：问题 4

先把约束写成标准形式 $f_1(x) = 1 - x \le 0$。由于这是 "≤ 0" 约束，对应乘子满足 $\lambda \ge 0$。Lagrange 函数为

$$L(x, \lambda) = (x-2)^2 + \lambda(1-x), \qquad \lambda \ge 0.$$

KKT 条件由四部分组成：

$$1 - x^\star \le 0, \qquad \lambda^\star \ge 0, \qquad \lambda^\star(1 - x^\star) = 0,$$
$$2(x^\star - 2) - \lambda^\star = 0.$$

前三项分别是原始可行、对偶可行和互补松弛；最后一项是驻点条件。

若 $x^\star > 1$，互补松弛强迫 $\lambda^\star = 0$，这时代入驻点条件会得到 $x^\star = 2$；若 $x^\star = 1$，驻点条件给出 $\lambda^\star = -2$，但 $\lambda^\star \ge 0$。总结而言，$x^\star = 2$, $\lambda^\star = 0$。

参考解答：问题 5

先把 “$\geq$” 约束改写为标准的 “≤ 0” 形式：

$$f_1(\boldsymbol{x}) = 1 - x_1 - x_2 \leq 0, \qquad h(\boldsymbol{x}) = x_1 - x_2 = 0.$$

因此不等式乘子 $\lambda \geq 0$，等式乘子 ν 没有符号限制。Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \lambda(1 - x_1 - x_2) + \nu(x_1 - x_2), \quad \lambda \geq 0.$$

KKT 条件：

$$\begin{aligned} & x_1 - \lambda + \nu = 0, \qquad x_2 - \lambda - \nu = 0, \\ & x_1 + x_2 \geq 1, \quad x_1 = x_2, \quad \lambda \geq 0, \\ & \lambda(1 - x_1 - x_2) = 0. \end{aligned}$$

通过分类讨论可知 $\boldsymbol{x}^\star = (1/2, 1/2)$, $\lambda^\star = 1/2$, $\nu^\star = 0$。